ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XII

ANNÉE 1933

14

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LES ÉCHANGES ET L'ADMINISTRATION DES ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, S'ADRESSER AU SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ, 20, RUE GOŁĘBIA, CRACOVIE (POLOGNE).

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1934

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XII

ANNÉE 1933

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LES ÉCHANGES ET L'ADMINISTRATION DES ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, S'ADRESSER AU SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ, 20, RUE GOŁĘBIA, CRACOVIE (POLOGNE).

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1934

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'*Annales de la Société polonaise de mathématique*; les travaux de langue polonaise paraissent dans un *Supplément*, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Table des matières.

Table des matières

Errata.

Page	*ligne*	*au lieu de*	*lire*
1	5 d'en bas	intégrale	intégrale possédant des dérivées partielles continues du premier ordre.

Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation $p+f(x,y,z)q=g(x,y,z)$.

Par

J. Perausówna (Kraków).

Considérons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}+f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=g(x,y,z) \tag{1}$$

et supposons que les fonctions f et g ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à y et z soient continues dans la région B, définie pas les relations:

$$0 \leqslant x < a; \ y \text{ et } z \text{ arbitraires.} \tag{2}$$

Supposons ensuite que ces dérivées, considérées dans la région B, soient bornées en valeur absolue et que l'on ait:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant A, \text{ etc.} \tag{3}$$

où A désigne une constante. Cela posé, envisageons une fonction $w(y)$ dont la dérivée est continue et bornée dans l'intervalle $-\infty < y < +\infty$

$$|w'(y)| \leqslant C. \tag{4}$$

Nous allons démontrer que l'équation (1) admet une intégrale unique $\chi(x,y)$ qui pour $x=0$ se réduit à $w(y)$ et qui est définie dans la région

$$0 \leqslant x < \alpha = \min(a,b) \tag{5}$$

où

$$b=\frac{1}{(1+C)A}. \tag{6}$$

La région précédente est la plus large possible au sens précisé plus bas (v. Exemple).

Ce théorème constitue une solution d'un problème posé par M. Ważewski[1]) et il est une généralisation d'un théorème de M. Kamke[2]). Nos hypothèses sont un peu plus générales: nous n'exigeons pas que les fonctions f et g soient bornées.

Lemme. Supposons que les fonctions f et g et leurs dérivées du premier ordre par rapport à y et z soient continues dans un ensemble ouvert Ω. Supposons que la fonction $w(y)$ possède dans l'intervalle $c < x < d$ une dérivée continue $w'(y)$. Considérons les équations caractéristiques

$$(7)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

$$(8)\qquad \frac{dq}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} q + \frac{\partial g}{\partial z} q - q^2 \frac{\partial f}{\partial z}$$

et supposons que l'intégrale de ces équations issue du point

$$(9)\qquad x = 0, \quad y = v, \quad z = w(v), \quad q = w'(v); \quad (c < v < d)$$

existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < \beta$. Représentons cette intégrale par les formules:

$$(10)\qquad x = u, \quad y = \bar{y}(u, v), \quad z = \bar{z}(u, v), \quad q = \bar{q}(u, v).$$

Désignons par E l'ensemble qui est l'image du rectangle

$$(11)\qquad 0 \leqslant u < \beta, \quad c \leqslant v < d$$

obtenue par la transformation $x = u$, $y = \bar{y}(u, v)$.

Dans ces conditions la surface (10) représente (sous forme paramétrique) l'unique intégrale de l'équation (1), intégrale qui 1° pour $x = 0$ se réduit à $w(y)$ et qui 2° possède dans E des dérivées partielles continues du premier ordre.

Démonstration. Désignons par $y(x, y^*, z^*)$, $z(x, y^*, z^*)$ l'intégrale du système (7) issue d'un point $x = 0$, $y = y^*$, $z = z^*$ situé dans Ω. On a alors dans l'intervalle $0 \leqslant x < \beta$ l'inégalité

$$\frac{D(y, z)}{D(y^*, z^*)} \neq 0$$

---

[1]) Nous laissons de côté le cas facile $A = 0$ dans lequel $a = \alpha$.

[2]) E. Kamke. Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig, 1930), p. 335, Satz 4. Nous traitons le cas $n = 1$.

et les dérivées partielles figurant dans ce déterminant sont continues[1]). De là il résulte que les fonctions (10) possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues dans le rectangle (11) et qu'il y subsiste l'inégalité

$$\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial v}\right)^2>0.$$

Par la méthode classique de Cauchy (qui peut être appliquée dans nos hypothèses [2])) on obtient l'identité suivante valable dans le rectangle (11)

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial v}=\bar{q}\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}. \tag{12}$$

Des deux relations précédentes il résulte que l'on a dans (11)

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}\neq 0.$$

Les deux premieres équations (10) peuvent donc être résolues par rapport à u et v et l'on aura $u=x$, $v=\bar{v}(x,y)$. Ou vérifie facilement que l'équation $z=\chi(x,y)=\bar{z}(x,\bar{v}(x,y))$ représente l'unique surface intégrale dont l'existence est affirmée par notre lemme [3]).

Démonstration du théorème. En vertu du lemme précédent il suffira de démontrer les deux propositions suivantes: I. Les caractéristiques issues du point (9) (avec $c=-\infty$, $d=+\infty$) existent dans l'intervalle (5). II. L'ensemble E (v. lemme) se confond avec la région: $0\leqslant x<\alpha$. À cet effet il suffira évidemment de prouver, pour tout u de l'intervalle $0\leqslant u<\alpha$, l'existence d'un nombre $\sigma(u)>0$ tel que l'inégalité $\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}\geqslant\sigma(u)>0$ soit valable dans l'intervalle $-\infty<v<+\infty$.

Ad I. Considérons un x_0 quelconque $(0<x_0<a)$ et désignons par $k\geqslant 0$ un nombre supérieur aux valeurs que prennent

---

[1]) Kamke l. c. p. 155, Satz 1.

[2]) Il suffit de rapprocher le raisonnement de Cauchy (cf. p. e. E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2-ème éd. Paris 1921, p. 187) au théorème à la page 155 du livre de M. Kamke pour voire que la méthode de Cauchy réussit dans notre cas sans qu'on suppose l'existence des dérivées du second ordre des fonctions f et w.

[3]) Kamke l. c. p. 330, Satz 1.

les fonctions $|f(x,0,0)|$, $|g(x,0,0)|$ dans l'intervalle $0 \leqslant x = u \leqslant x_0$ Nous aurons d'après (7) et (3)

$$\left|\frac{d\bar{y}}{du}\right| + \left|\frac{d\bar{z}}{du}\right| \leqslant 2k + 2A(|\bar{y}| + |\bar{z}|)$$

d'où il résulte [1]) que les intégrales $\bar{y}$ et $\bar{z}$ existent dans l'intervalle $0 \leqslant x = u \leqslant x_0$. Les intégrales $\bar{y}$ et $\bar{\ }$ existent donc dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$.

Portons ces intégrales dans l'équation (8). Par le point $x = 0$, $q = w'(v)$ il passe une intégrale $\bar{q}$ de cette équation. Nous avons d'après (3)

$$\left|\frac{d\bar{q}}{dx}\right| \leqslant A(1 + |\bar{q}|)^2.$$

Considérons l'équation auxiliaire

$$\frac{dQ}{dx} = A(1 + Q)^2 .$$

L'intégrale de cette équation issue du point $x = 0$, $Q = C$ [cf. (4)] est

$$Q(x) = \frac{C + Ax(1 + C)}{1 - Ax(1 + C)}.$$

Cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$ (elle cesse d'exister pour $x = b$ [cf. (6)]). De là il résulte que $\bar{q}$ existe dans cet intervalle et que l'on y a

(13) $$|\bar{q}| \leqslant Q(x).\text{[2])}$$

La proposition I est ainsi établie.

Ad II. On a [3]) (avec $x = u$) [cf. (12)]

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}\right) = \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\bar{q}\right]\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}$$

et comme $\dfrac{\partial \bar{y}(0, v)}{\partial v} = 1$, on a d'après (3) et (13)

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \geqslant e^{-A\int_0^u [1+Q(t)]dt} = \sigma(u) > 0, \; (0 \leqslant u < a; \; -\infty < v < +\infty)$$

ce qui prouve la proposition II.

---

[1]) Kamke l. c. p. 151, Hilfsatz 3 et p. 135, Satz 2.

[2]) La démonstration est tout à fait analogue à celle du Hilfsatz 2, p. 93, loc. cit. On s'appuiera aussi, comme précédemment, sur le Satz 2, p. 135 ibid.

[3]) Kamke, l. c. p. 155, Satz 1.

Exemple. Considérons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} - A(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = A(y+z)$$

et posons $w(y) = Cy$. Les hypothèses de notre théorème sont vérifiées. L'intégrale de cette équation qui pour $x=0$ se réduit à w est

$$\chi(x, y) = y\,\frac{C + A(1+C)x}{1 - A(1+C)x}$$

et elle cesse d'exister pour $x = b$ [cf. (6)]. On ne peut donc pas remplacer, dans notre théorème, l'intervalle (5) par un intervalle plus large.

Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire.

Par

T. Ważewski (Kraków).

Nous donnons, dans le présent travail, une appréciation [cf. (6) plus bas] du domaine de l'existence des intégrales de l'équation (1). — M. E. Kamke a donné une appréciation de ce domaine dans des conditions analogues[1]). Notre appréciation, obtenue par une autre méthode, est *exacte*, c.-à-d. notre domaine ne peut pas être remplacé par un domaine plus large comme le montre l'exemple à la fin du travail (cf. Remarque).

Théorème. Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x} + \sum_{\nu/1}^{n} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_{n+1}) \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_\nu} = f_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_{n+1})$$

ou tout court l'équation

$$(2) \qquad p + \sum_{\nu/1}^{n} f_\nu q_\nu = f_{n+1},$$

n étant suppérieur à l'unité[2]).

Supposons que les fonctions

$$f_\nu, \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu} \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n+1)$$

---

[1]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930 (cité dans la suite sous l'abbréviation D. r. F.) p. 335, Satz 4. M. Kamke suppose en plus que les fonctions f_ν [dans l'équation (1)] soient bornées.

[2]) Le cas $n = 1$ a été traité antérieurement par M[lle] J. Perausówna.

soient définies et continues dans la couche

(3) $\quad |x| < a \leqslant +\infty, \; -\infty < y_\nu < +\infty \quad (\nu = 1, \ldots, n+1)$

et que l'on ait dans cette couche les inégalités

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}\right| \leqslant A \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n+1). \tag{4}$$

Soit en plus $\omega\,(y_1, \ldots, y_n)$ une fonction possédant pour toutes les valeurs des variables $(y_1, \ldots, y_n)$ des dérivées partielles continues du premier ordre satisfaisant aux inégalités

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial y_\nu}\right| \leqslant C, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

où A et C désignent deux nombres fixes.

Ceci étant l'équation (1) admet une intégrale unique [1]) $y_{n+1} = \chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ qui 1⁰) est définie dans la couche

$$|x| < \alpha = \operatorname{minimum}\left(a, \frac{1}{A(n-1)} \log \frac{n(C+1)}{nC+1}\right), \qquad -\infty < y_\nu < +\infty \tag{6}$$

qui 2⁰) possède dans cette couche des dérivées partielles continues du premier ordre et qui 3⁰) satisfait en tout point $(y_1, \ldots, y_n)$ à l'égalité

$$\chi(0, y_1, \ldots, y_n) = \omega\,(y_1, \ldots, y_n). \tag{7}$$

Démonstration. Nous nous appuierons sur les deux théorèmes suivants que nous citons pour plus de clarté.

I. *Conséquence d'un théorème de* M. Hadamard [2]). Soit

$$y_\nu = \overline{\varphi}_\nu(\eta_1, \ldots, \eta_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

une transformation dont les fonctions composantes $\overline{\varphi}_\nu$ possèdent dans l'espace des points $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ tout entier des dérivées partielles du premier ordre *continues et bornées*. Supposons en plus qu'en tout point $\eta_1, \ldots, \eta_n$ on ait

$$\left|\frac{D(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_n)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_n)}\right| \geqslant \beta > 0$$

---

[1]) Pour l'unicité cf. D. r. F. p. 330, Satz 1.

[2]) J. Hadamard. Sur les transformations ponctuelles, Bull. d. l. Soc. Math. de France T. XXXIV, p. 71.

où β désigne un nombre fixe. La transformation en question admet alors une transformation inverse $\eta_\nu = \varrho_\nu(y_1, \ldots, y_n)$ qui est définie dans *l'espace* $(y_1, \ldots, y_n)$ *tout entier* et possède partout des dérivées partielles continues du premier ordre.

II. *Modification d'un théorème* de M. Kamke[1]). Considérons deux systèmes d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{8}$$

$$\frac{dy_i}{dx} = H_i(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{9}$$

et supposons que 1⁰) les fonctions h_i soient continues dans la couche

$$|x| < \gamma, \; -\infty < y_\nu < +\infty, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

2⁰) les fonctions H_i soient définies et continues dans l'ensemble

$$0 \leqslant x < \gamma, \; 0 \leqslant y_\nu < +\infty, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

3⁰) la fonction H_i $(i = 1, \ldots, n)$ soit croissante au sens large par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, c.-à-d. que l'on ait pour toute la couple des points de l'ensemble (11) l'inégalité

$$H_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, \bar{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) \geqslant H_i(x_1, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

lorsque
$$\bar{y}_j > y_j, \quad (j \neq i)$$

4⁰) on ait en tout point de la couche (10)

$$|h_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant H_i(|x|, |y_1|, \ldots, |y_n|)$$

5⁰) entre les coordonnées des points

$$y_1{}^0, \ldots, y_n{}^0 \tag{12}$$

$$Y_1{}^0, \ldots, Y_n{}^0 \tag{13}$$

subsistent les inégalités

$$|y_\nu{}^0| \leqslant Y_\nu{}^0, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[1]) E. Kamke. Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II, Acta Mathematica T. 58, p. 82, Satz 9. La présente modification se rattache facilement à ce théorème.

6°) le système (9) admette une intégrale unique $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ passant par le point (13) et cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < \gamma$.

Ceci étant, chaque intégrale $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ du système (8) passant par le point (12) se laisse prolonger de façon à exister dans l'intervalle $-\gamma < x < \gamma$ et on a dans cet intervalle

$$|y_\nu(x)| \leqslant Y_\nu(|x|), \quad (\nu = 1, \ldots, n; \; -\gamma < x < \gamma).$$

III. Les équations des caractéristiques de l'équation (1) sont formées par la réunion des systèmes suivants (14) et (15)

$$\text{Système } (S). \quad \left| \begin{array}{lll} (14) & \dfrac{d y_\nu}{d x} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_{n+1}), & (\nu = 1, \ldots, n+1) \\ (15) & \dfrac{d q_i}{d x} = l_i(x, y_1, \ldots, y_{n+1}, q_1, \ldots, q_n), & (i = 1, \ldots, n) \end{array} \right.$$

$$\text{où} \quad l_i = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_i} - \sum_{\lambda/1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_i} q_\lambda + q_i \left\{ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_{n+1}} - \sum_{\lambda/1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{n+1}} q_\lambda \right\}.$$

IV. Les fonctions $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}$ sont, par hypothèse, continues (sans plus). Elles ne satisfont donc pas, en général, à la condition de Lipschitz. Il en est de même des fonctions l_i, mais malgré cela on peut démontrer l'unicité des intégrales du système (S): Nous affirmons que par tout point $x = \xi$, $y_\nu = \eta_\nu$, $q_i = \varkappa_i$, où $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$ appartient à la couche (3) et $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ sont arbitraires, il passe une intégrale unique du système (S).

En effet, par tout point $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ en question il passe une intégrale unique du système (14) dont les seconds membres satisfont à la condition de Lipschitz par rapport à $y_1, \ldots, y_{n+1}$. Si nous portons cette intégrale dans les deuxièmes membres du système (15), ceux-ci deviendront des polynômes en $q_1, \ldots, q_n$ dont les coëfficients sont continus en x. La condition de Lipschitz par rapport à $q_1, \ldots, q_n$ se trouvera donc vérifiée, ce qui assure l'unicité des intégrales.

V. Ceci étant établi, nous avons le droit de désigner l'intégrale du système (S) issue du point

$$\xi = 0, \; \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}, \; \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$$

par

$$(16) \qquad y_\nu = \varphi_\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}), \qquad (\nu = 1, \ldots, n+1)$$

$$(17) \qquad q_i = \psi_i(x, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

VI. Nous allons démontrer que les intégrales (16) et (17) existent dans l'intervalle

$$|x| < a$$

(cf. (6)) sous la condition que

$$(18) \quad |\varkappa_i| \leqslant C, \; -\infty < \eta_\nu < +\infty, \quad (i = 1, \ldots, n; \; \nu = 1, \ldots, n+1).$$

Désignons à cet effet par $s(x)$ le plus grand des $2n+2$ nombres

$$|f_\nu(x, 0, \ldots, 0)|, \; |f_\nu(-x, 0, \ldots, 0)|, \qquad (\nu = 1, \ldots, n+1).$$

La fonction $s(x)$ sera non négative et continue dans l'intervalle $|x| < a$.

En appliquant aux différences $f_i(x, y_1, \ldots, y_{n+1}) - f_i(x, 0, \ldots, 0)$ le théoreme sur les accroissements finis, nous obtiendrons (cf. (4)) les inégalités suivantes, valables dans la couche (3)

$$|f_\nu| \leqslant s(|x|) + A \sum_{\lambda/1}^{n+1} |y_\lambda|, \qquad (\nu = 1, \ldots, n+1)$$

$$|l_i| \leqslant A \left\{ 1 + \sum_{\lambda/1}^{n} |q_\lambda| \right\} (1 + |q_i|), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Considérons le système auxiliaire

$$\frac{dy_\nu}{dx} = s(x) + A \sum_{\lambda/1}^{n+1} y_\lambda, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{dq_i}{dx} = A \left\{ 1 + \sum_{\lambda/1}^{n} q_\lambda \right\} (1 + q_i), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

L'intégrale de ce système qui prend pour $x = 0$ les valeurs

$$y_\nu = \delta = \max(|\eta_1|, \ldots, |\eta_{n+1}|), \quad (\nu = 1, \ldots, n+1)$$

$$q_i = C, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

se calcule effectivement et a la forme

$$y_\nu(x) = Y(x) = e^{(n+1)Ax}[\delta + \int_0^x s(t)\, e^{-(n+1)At}\, dt],$$

$$q_i(x) = Q(x) = \frac{(nC+1)\, e^{(n-1)Ax} - C - 1}{n(C+1) - (nC+1)\, e^{(n-1)Ax}}.$$

On vérifie facilement que les intégrales précédentes existent dans l'intervalle $|x| < \alpha$, la fonction $Q(x)$ cessant d'exister pour $x = \frac{1}{(n-1)A} \log \frac{n(C+1)}{nC+1}$ et cette valeur intervient (cf. (6)) dans la définition de α.

Il en résulte en raison du théorème de M. Kamke (cf. II) que la proposition VI est juste et que l'on a, en plus, les inégalités

$$(19) \qquad |\psi_i(x, \eta_1, \ldots, \varkappa_n)| \leqq Q(x). \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

valables pour $|x| < \alpha$ sous l'hypothèse (18).

VII. Les dérivées partielles du premier ordre des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ par rapport à la variable η_μ $(\mu = 1, \ldots, n+1)$ existent et sont continues dans l'ensemble [1])

$$(20) \qquad |x| < \alpha, -\infty < \eta_\nu < +\infty \quad (\nu = 1, \ldots, n+1).$$

Elles satisfont dans l'intervalle $|x| < \alpha$ au système

$$(21) \qquad \frac{du_\nu}{dx} = \sum_{\lambda/1}^{n+1} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda} u_\lambda \qquad (\nu = 1, \ldots, n+1)$$

où l'on a effectué dans $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda}$ la substitution (16).

VIII. Effectuons maintenant, dans les fonctions φ_ν et ψ_i les substitutions

$$\eta_{n+1} = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n), \ \varkappa_i = \frac{\partial \omega}{\partial \eta_i}.$$

Nous obtiendrons

$$(22) \quad y_\nu = \overline{\varphi}_\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \varphi_\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n)), \ (\nu = 1, \ldots, n+1)$$

$$q_i = \overline{\psi}_i(x, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \psi_i\left(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial \eta_1}, \ldots, \frac{\partial \omega}{\partial \eta_n}\right).$$

---

[1]) D. r. F. p. 155, Satz 1.

En vertu de l'inégalité (5) et de la proposition VI, les fonctions $\overline{\varphi}_\nu$ et $\overline{\psi}_i$ sont définies dans l'ensemble

$$|x| < a, \quad -\infty < \eta_\nu < +\infty, \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

et les fonctions $\overline{\varphi}_\nu$ possèdent dans cet ensemble des dérivées partielles continues du premier ordre (cf. VII). — Il est immédiat (cf. VII) que les fonctions

$$(23) \qquad \mu_\nu^j = \frac{\partial \overline{\varphi}_\nu}{\partial \eta_j}, \quad (\nu = 1, \dots, n+1;\ j = 1, \dots, n)$$

remplissent les équations (21) [1]) dans l'intervalle $|x| < a$ avec $\eta_1, \dots, \eta_n$ quelconques. Notons encore que pour $x = 0$, on a

$$(24) \quad \overline{\varphi}_\nu(0, \eta_1, \dots, \eta_n) = \eta_\nu; \quad \frac{\partial \overline{\varphi}_\nu}{\partial \eta_j} = 0, \ (\nu \neq j); \quad \frac{\partial \overline{\varphi}_\nu}{\partial \eta_\nu} = 1, \ (\nu = 1, \dots, n)$$

$$(24\,\text{bis}) \qquad \overline{\varphi}_{n+1}(0, \eta_1, \dots, \eta_n) = \omega(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

IX. Nous allons démontrer que les équations (22) donnent une représentation paramétrique de la surface intégrale de l'équation (1), surface remplissant les conditions annoncées dans notre théorème.

X. Nous démontrerons à cet effet 1°) que les n équations

$$y_\nu = \overline{\varphi}_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

considérées pour les points

$$(25) \qquad |x| < a, \quad -\infty < \eta_\nu < +\infty, \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

peuvent être résolues par rapport aux variables $\eta_1, \dots, \eta_n$ et cela quel que soit $|x| < a$ et que

2° dans la transformation inverse ainsi obtenue

$$\eta_\nu = \overline{\eta}_\nu(x, y_1, \dots, y_n), \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

les fonctions $\overline{\eta}_\nu$ possèdent des dérivées partielles continues dans la couche (6).

---

[1]) Dans $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda}$ on effectue maintenant la substitution (22).

Or on démontre facilement l'identité

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{n+1}}{\partial \eta_j} - \sum_{\lambda/1}^{n} \bar{\psi}_\lambda \frac{\partial \bar{\varphi}_\lambda}{\partial \eta_j} = 0, \qquad (j = 1, \ldots, n)\text{[1]} \tag{26}$$

qui est valable dans l'ensemble (25).

Chacun des n systèmes de n fonctions

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_\nu}{\partial \eta_j} \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$$

remplit donc (cf. VIII), les équations

$$\frac{du_\nu}{dx} = \sum_{\lambda/1}^{n} \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda} + \bar{\psi}_\lambda \frac{\partial f_\nu}{\partial y_{n+1}} \right) u_\lambda \text{[2]}$$

et cela dans l'intervalle $|x| < \alpha$ avec $\eta_1, \ldots, \eta_n$ quelconques. Remarquons que [cf. (4), (19), (22)]

$$\left| \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda} + \bar{\psi}_\lambda \frac{\partial f_\nu}{\partial y_{n+1}} \right| \leqslant [1 + Q(x)]\, A. \tag{27}$$

On obtient donc en vertu de (24)[3]

$$I(x, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \frac{D(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_n)} = e^{\int_0^x \left[\sum_{i/1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i} + \frac{\partial f_i}{\partial y_{n+1}} \bar{\psi}_i \right) \right] dx} \geqslant \tag{28}$$

$$\geqslant e^{-\int_0^{|x|} nA[1+Q(x)]\,dx}$$

---

[1]) En désignant le premier membre de cette identité par $H(x, v_1, \ldots, v_n)$ on observe que $H(0, v_1, \ldots, v_n) = 0$. On démontre en outre en s'appuyant sur les relations (15) et (21) $\left(\text{appliquées aux fonctions } \bar{\psi}_\nu \text{ et } \frac{\partial \bar{\varphi}_\nu}{\partial \eta_i}\right)$ l'identité

$$\frac{dH}{dx} = H(x) \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_{n+1}} - \sum_{\lambda/1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{n+1}} \bar{\psi}_\lambda \right)$$

d'où résulte immédiatement l'identité (26).

Nous voyons ainsi que la méthode classique de Cauchy (v. p. e. E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1921, p. 187) peut être appliquée aussi dans nos hypothèses qui ne supposent rien sur les dérivées du second ordre.

[2]) On doit appliquer au deuxième membre la substitution (22).

[3]) D. r. F. p. 155 Satz 1.

inégalite valable dans la couche (25). Le second membre de cette inégalité ne dépend pas de $v_1, \ldots, v_n$. Il est positif et fixe lorsque x est considéré comme fixe.

Considérons d'autre part le systéme auxiliaire

$$\frac{d u_\nu}{d x} = A\left(1 + Q(x)\right) \sum_{\lambda/1}^{n} u_\lambda \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Les intégrales de ce système qui pour $x = 0$ prennent la valeur $= 1$ sont

$$u_i(x) = U(x) = e^{\int_0^x n A [1 + Q(x)]\, dx}.$$

On a donc en raison du théorème de M. Kamke (cf. II) et d'après (24) et (27) les inégalités

$$\left| \frac{\partial \bar{\varphi}_\nu}{\partial \eta_j} \right| < U(|x|) \tag{29}$$

valables dans l'ensemble (25). — En s'appuyant sur les inégalités (28) et (29) on déduit du théorème de M. Hadamard (cf. I) une partie de la proposition X. On achève la démonstration de cette proposition en s'adressent au théorème classique (de caractère local) sur les fonctions implicites (tout en tenant compte de VIII).

XI. Posons maintenant

$$\chi(x, y_1, \ldots, y_n) = \bar{\varphi}_{n+1}(x, \bar{\eta}_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \bar{\eta}_n(x, y \ldots, y_n)).$$

Cette fonction possède dans la couche (6) des dérivées partielles continues du premier ordre (cf. X) et elle vérifié l'identité (7) (cf. (24 bis)).

Il reste à prouver que la fonction χ ainsi obtenue représente une *intégrale* de l'équation (1), intégrale valable dans la couche (6).

Or ceci peut être démontré par deux voies suivantes dont voici la première.

Soit $x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ un point quelconque de la couche (6) et posons $y_{n+1}^0 = \chi(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$. D'après la construction même de la fonction χ, par le point $x^0, y_1^0, \ldots, y_{n+1}^0$ il passe une intégrale des équations (14) qui. considérée pour les $|x| < \alpha$ est située sur la surface $y_{n+1} = \chi(x, y_1, \ldots, y_n)$. La fonction χ possédant en outre des

dérivées partielles du premier ordre continues dans la couche (6) il résulte d'un théorème de M. Kamke [1]) que χ représente, dans cette couche, une surface intégrale de l'équation (1).

Une autre voie dûe à Cauchy [2]) s'applique aussi dans les hypothèses de notre théorème.

Remarque. Gardons les hypothèses de notre théorème. Nous verrons que le nombre α ne peut pas être remplacé par un nombre plus grand de façon que notre théorème continue d'être vrai. Ceci résulte de l'exemple qui suit. — Considérons l'équation

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x} - \left(\sum_{\lambda/1}^{n+1} A y_\lambda\right) \cdot \left(\sum_{\nu/1}^{n} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_\nu}\right) = \sum_{\lambda/1}^{n+1} A y_\lambda$$

($A > 0$; le cas $A = 0$ est banal) et posons $\omega = C \cdot (y_1 + \ldots + y_n)$.

Les hypothèses de notre théorème sont évidemment vérifiées. L'unique surface intégrale χ vérifiant la thèse de notre théorème est

$$y_{n+1} = (y_1 + \ldots + y_n) \frac{C - V(x)}{1 + n\, V(x)}$$

où

$$V(x) = \frac{C+1}{n-1} \left(e^{A(1-n)x} - 1\right)$$

et cette intégrale cesse d'exister lorsque $1 + n\, V = 0$, c.-à-d. pour $x = \dfrac{1}{A(n-1)} \log \dfrac{n(C+1)}{n\,C+1}$.

---

[1]) D. r. F. 330, Satz 1.

[2]) Goursat l. c.

Sur le premier théorème fondamental dans la théorie des déformations continues.

Par

W. Wilkosz (Cracovie).

§ 1.

L'ensemble des formules:

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

où l'on suppose les fonctions f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ varier d'une manière continue dans un domaine déterminé (D), représente au point de vue mathématique, une déformation finie d'un milieu continu plongé dans l'espace à n dimensions.

Depuis les recherches de MM. F. et E. Cosserat [1]) on introduit dans l'étude analytique des déformations continues la forme quadratique différentielle:

$$(2) \qquad d s'^2 = \sum_{p/1}^{n} d y_p^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

les coeffitients a_{ik} étant donnés par:

$$(3) \qquad a_{ik} = \sum_{p/1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k}.$$

---

[1]) Annales de Toulouse 1 sér. v. X.

A vrai dire, la forme (2) ne représente pas toujours le carré de l'élément linéaire d'une courbe lorsque l'on suppose seulement les fonctions f_i douées de dérivées partielles du premier ordre existant en tout point du domaine (D). Il ne serait pas difficile de montrer que la condition nécessaire et suffisante en question devrait supposer la *différentiabilité* (totale) des fonctions f_i au sens de Stolz-Fréchet. Mais, cette question ne nous occupe pas dans ce moment.

Dans les traités on démontre sous le nom du *premier théorème fondamental de la théorie des déformations continues* le théorème suivant:

Supposons les coeffitients a_{ik} satisfaire les relations:

$$(4) \qquad a_{ik}(x_1 \ldots, x_n) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} i = k \\ i \neq k \end{matrix} \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

et cela *identiquement* dans le domaine (D). Dans ce cas les fonctions f_i doivent se réduire à des *polynomes* du 1^er^ degré des variables $(x_1, \ldots, x_n)$. Les dérivées $\dfrac{\partial f_p}{\partial x_k}$ se réduiront donc à des constantes. Leur tableau $\left\|\dfrac{\partial f_p}{\partial x_k}\right\|$ étant, grâce aux relations (4), orthogonal la déformation (1) représentera donc un *mouvement* du milieu suivi éventuellement *d'une symétrie*.

Or, les démonstrations habituelles de ce théorème supposent en général les fonctions f_i douées des dérivées partielles *continues* au moins du prémier ordre (quoique les auteurs ne précisent pas leurs hypothèses). Le but du présent travail consiste à démontrer ce 1^er^ théorème fondamental en *ne supposant* que la *seule existence* des *dérivées* partielles du premier ordre et cela en *tout point* du domaine considéré.

§ 2.

Il est d'abord clair qu'il suffit d'établir la justesse du notre théorème dans le voisinage d'un point arbitraire du domaine. En effet, les dérivées étant constantes *localement* elles le resteront dans le domaine tout *entier*.

Ensuite, la démonstration que je me propose de fournir sera telle que, à des difficultés seules d'écriture près, il suffit de la donner dans le cas du plan.

Précisons donc encore une fois nos hypothèses:

Nous allons envisager la déformation donnée par:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$$

et nous supposons:

1° les fonctions f et g déterminées dans un domaine (ensemble ouvert connexe) (D);

2° douées des dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

finies en tout point du domaine;

3° les relations:

$$(\beta)\qquad \left|\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 1 \end{array}\right.$$

satisfaites dans le domaine (D).

§ 3.

1. La première et la dernière des relations (β) nous montre que les fonctions f et g sont *continues* par rapport à (x, y) dans le domaine.

2. Les dérivées du 1er ordre supposées existant *en tout* point du domaine, elles représentent dans ce domaine d'autant fonctions de la 1ère *classe* de Baire.

Il s'en suit qu'étant donné un ensemble parfait M contenu dans le domaine, les derivées sont *pantachiquement* continues dans l'ensemble M et par rapport à M. Cela veut dire que pour chacune d'elles l'ensemble des points où elle est *continue*, lorsque on la considère seulement aux point de l'ensemble M, constitue un ensemble *partout-dense* dans M. C'est là une propriété bien connue des fonctions de la 1ère classe. L'ensemble des points où la dérivée est continue

est un ensemble *résiduel* c'est-à-dire complémentaire à un ensemble de la première catégorie de Baire. La partie commune d'un nombre fini de tels ensembles étant aussi un ensemble résiduel, il s'en suit que pour chaque M parfait les quatre dérivées sont *simultanément continues* par rapport à M dans un sous-ensemble partout-dense dans M.

3. Introduisons la notation $I(x, y)$ pour désigner le jacobien:

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

Les hypothèses (β) nous permettent d'affirmer que l'on aura

$$I^2(x, y) = 1$$

en tout point du domaine (D).

4. Nous aurons besoin d'un lemme qui généralise un peu les théorèmes classiques sur l'inversion d'un système de fonctions et qui aura peut-être son importance indépendente de nos considerations particulières.

Voici ce lemme:

Supposons dans la transformation

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned}$$

1° les dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$$

existantes dans le voisinage d'un point particulier $P_0(x_0, y_0)$ et *continues* au point P_0 lui-même.

2° le jacobien $I(x, y)$ *différent* de zéro *au point* P_0.

Dans ce cas j'affirme que la transformation (α) sera *biunivoque dans le voisinage du point* P_0.

Démonstration: Supposons le contraire. On pourrait donc trouver deux suites de points

$$(x'_k, y'_k); \; (x''_k, y''_k)$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

telles que:

1° $$x'_k \neq x''_k \quad \text{ou} \quad y'_k \neq y''_k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

2° $$\lim x'_k = \lim x''_k = x_0$$
$$\lim y'_k = \lim y''_k = y_0.$$

3° $$x_0 - \varepsilon < x'_k < x_0 + \varepsilon, \quad x_0 - \varepsilon < x''_k < x_0 + \varepsilon$$
$$y_0 - \varepsilon < y'_k < y_0 + \varepsilon, \quad y_0 - \varepsilon < y''_k < y_0 + \varepsilon$$
$$\varepsilon > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

4° les hypothèses du lemme soient satisfaites dans le voisinage

$$\begin{Bmatrix} x_0 - \varepsilon, & x_0 + \varepsilon \\ y_0 - \varepsilon, & y_0 + \varepsilon \end{Bmatrix}$$

5° $$f(x'_k\, y'_k) = f(x''_k, y''_k)$$
$$g(x'_k, y'_k) = g(x''_k, y''_k)$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Écrivons les dernières équations (5) sous la forme:

$$0 = [f(x'_k, y'_k) - f(x''_k. y'_k)] + [f(x''_k, y'_k) - f(x''_k, y''_k)]$$
$$0 = [g(x'_k, y'_k) - g(x''_k, y'_k)] + [g(x''_k, y'_k) - g(x''_k, y''_k)]$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

et appliquons le théorème des accroissements finis. Il vient:

$$0 = (x'_k - x''_k)\, f'_x(\xi_k, y'_k) + (y'_k - y''_k)\, f'_y(x''_k, \eta_k)$$
$$0 = (x'_k - x''_k)\; g'_x(\overline{\xi}_k, y'_k) + (y'_k - y''_k)\, g'_y(x''_k, \overline{\eta}_k)$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

avec ξ_k, $\overline{\xi}_k$ compris entre x'_k et x''_k et de même η_k, $\overline{\eta}_k$ entre y'_k et y''_k.

Les différences: $x'_k - x''_k$, $y'_k - y''_k$ n'étant pas toutes les deux nulles on aurait:

$$\begin{vmatrix} f'_x(\xi_k, y'_k), & f'_y(x''_k, \eta_k) \\ g'_x(\overline{\xi}_k, y'_k), & g_y(x''_k, \overline{\eta}_k) \end{vmatrix} = 0.$$

En passant à la limite avec k, on obtiendrait (grâce à la continuité des dérivées au point P_0).

$$I(x_0, y_0) = 0$$

contrairement à l'hypothèse du lemme.

5. Passons maintenant à la démonstration du lemme principal dans nos considérations.

Supposons que dans un domaine (Δ) contenu dans le domaine (D):

1° la transformation

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$$

satisfasse aux hypothèses 1° 2° et 3° du *théorème* fondamental;
2° qu'elle soit *biunivoque*;
3° que le jacobien $I(x, y)$ conserve constamment la valeur $+1$ (ou -1) en tout point du domaine.

Je dis que dans ce cas la transformation (α) représente un *déplacement* suivi éventuellement d'une *symétrie.*

Démonstration. Remarquons d'abord que, les derivées f'_x, f'_y, g'_x, g'_y étant *bornées,* la transformation appartient à la classe des transformations „à condition de Lipschitz" considérées par M. Rademacher dans son travail [1]) inseré dans les Math. Annalen t. 79.

Les resultats de son travail nous assurent que:

(1) les fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ sont *différentiables* au sens de Stolz-Fréchet *presque-partout* dans le domaine (Δ);

(2) la mesure superficielle de l'ensemble M' correspondant par la transformation (α) à un ensemble *mesurable* et *borné* M contenu dans le domaine (Δ) sera donnée par la formule:

$$\text{mes} \cdot M' = \iint\limits_M |I(x, y)|\, dx\, dy.$$

Donc dans notre cas

$$\text{mes} \cdot M' = \text{mes} \cdot M$$

et la transformation (α) *„conserve les mesures"* [2]).

Soit $P_0(x_0, y_0)$ un point particulier du domaine (Δ). Traçons une *cironférence* $\overline{C}$ ayant ce point comme centre et de rayon R, contenue avec son intérieur dans le domaine. Considérons toutes les circonférences concentriques avec $\overline{C}$ et contenues dans (Δ), ainsi que tous leurs rayons. Introduisons des coordonées polaires dans l'intérieur de $\overline{C}$ par les formules:

$$(\sigma)\qquad \begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

---

[1]) M. Rademacher: Über totale und partielle Differenzierbarkeit.
[2]) v. Rademacher travail cité.

Considérons les fonctions transformées par (σ):

$$u = F(r, \varphi) = f(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)$$
$$v = G(r, \varphi) = g(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi).$$

La transformation (σ) ayant la propriété de transformer en des ensembles de *mesure nulle seulement* les ensembles de *mesure nulle* et étant régulière, nous en concluons que les fonctions

$$F(r, \varphi), \quad G(r, \varphi)$$

sont *presque-partout totalement différentiables* dans l'ensemble:

$$0 \leqslant r \leqslant R$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

On obtient les courbes transformées par (α) des *circonférences* concentriques avec $\bar{C}$ et des *rayons issus* du point P_0 en faisant respectivement $r = \text{const.}$ ou $\varphi = \text{const.}$ dans les formules

$$(\tau) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= F(r, \varphi) \\ v &= G(r, \varphi) \end{aligned} \right.$$

On voit donc que: pour *presque* chaque valeur constante φ_0 et pour *presque* chaque valeur r_0 les courbes transformées par (τ) sont *différentiables* pour *presque* chaque valeur de r ou respectivement pour *presque* chaque valeur de φ et que les dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \varphi}$$

s'y calculent par des formules classiques:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi \ldots \quad \text{etc.}$$

Prenons une telle valeur φ_0 ou r_0. Considérons p. ex. le rapport:

$$\frac{F(r+k, \varphi_0) - F(r, \varphi_0)}{k} =$$

$$= \frac{1}{k}[f(x_0 + (r+k)\cos\varphi_0,\ y_0 + (r+k)\sin\varphi_0) - $$
$$- f(x_0 + r\cos\varphi_0,\ y_0 + r\sin\varphi_0)]$$

$$= \frac{1}{k}[f(x_0 + (r+k)\cos\varphi_0,\ y_0 + (r+k)\sin\varphi_0) - $$
$$- f(x_0 + r\cos\varphi_0,\ y_0 + (r+k)\sin\varphi_0)] +$$

$$+\frac{1}{k}\left[f(x_0+r\cos\varphi_0,\ y_0+(r+k)\sin\varphi_0)-\right.$$
$$\left.-f(x_0+r\cos\varphi_0,\ y_0+r\sin\varphi_0)\right]$$

$$=\cos\varphi_0\, f'_x(x_0+(r+\theta k)\cos\varphi_0,\ y_0+(r+k)\sin\varphi_0)$$
$$+\sin\varphi_0\cdot f'_y(x_0+r\cos\varphi_0,\ y_0+(r+\theta' k)\sin\varphi_0).$$

Donc:

$$\left|\frac{F(r+k,\varphi_0)-F(r,\varphi_0)}{k}\right|\leqq|f'_x|+|f'_y|\leqq 2$$

et on voit que les nombres dérivées de Dini de la fonction $F(r,\varphi)$ par rapport à r sont *bornés*.

Les autres nombres dérivés tant pour la fonction $F(r,\varphi)$ que pour $G(r,\varphi)$ possèdent la même propriété.

Les courbes transformées

$$\left.\begin{aligned} u&=F(r_0,\varphi)\\ v&=G(r_0,\varphi)\end{aligned}\right\}\ \text{et}\ \left.\begin{aligned} u&=F(r,\varphi_0)\\ v&=G(r,\varphi_0)\end{aligned}\right\}$$

sont donc *rectifiables* et *absolument continues*.

En calculant leur longueur par la formule de M. Lebesgue

$$\int_0^r\sqrt{F_r'^2+G_r'^2}\,dr,\quad \int_0^\pi\sqrt{F_\varphi'^2+G_\varphi'^2}\,d\varphi$$

(les dérivées ayant presque partout un sens et pouvant être calculées par les formules mentionnées), nous vérifierons sans difficulté que les *longueurs se conservent*, et cela grâce aux relations (β).

Donc: Dans la transformation en question *presque* chaque circonférence considérée et presque chaque *rayon* issu du point P_0 conserve sa longueur.

Considérons une telle circonférence C_0 de rayon r_0, ainsi que ses rayons. La transformation (α) étant *biunivoque* et *continue* on a grâce au théorème de Jürgens [1] les faits suivants: Le domaine (Δ) se transforme en un autre, (Δ') — la circonférence C_0, en une courbe C'_0 de Jordan fermée, l'intérieur de C_0 en l'intérieur de C'_0, le point P_0, en un point déterminé P' situé à l'intérieur de C'_0, les

[1] v. p. ex. mon fasc. XLV du Mémorial des Sciences Mathématiques: Les propriétés topologiques du plan euclidien, p. 44.

rayons de C_0, en des arcs simples joignant le point P_0' aux divers points de la courbe C_0' et se trouvant à l'intérieur de C_0'. Traçons la circonférence $\overline{C}_0$ de centre P_0' et de rayon r_0 dans le plan (u, v).

Presque tous les rayons de C_0 étant transformés en des arcs simples de longueur r_0 issus du point P_0, on voit que la courbe *continue* $\overline{C}_0$ a tous ses points à l'intérieur de la circonférence $\overline{C}_0$ ou sur cette circonférence elle-même.

D'autre part la mesure superficielle de l'intérieur de la courbe C_0' doit être égale à

$$r_0^2\pi$$

(la transformation (α) conserve les mesures superficielles) donc *égale* à la surface du *cercle* $\overline{C}_0$.

La courbe C_0' *coïncide donc exactement* avec *la circonférence* $\overline{C}_0$. Presque tous ses rayons coïncident avec des rayons de $\overline{C}_0$ — donc en raison de la continuité, *tous* les rayons de la circonférence C_0 se transforment en des rayons de la circonférence $\overline{C}_0$ $(\equiv C_0')$.

Presque toutes les circonférences autour du point C se transforment de cette manière — donc, en raison de la continuité, *toutes* les *circonférences* du centre P_0 le font aussi. Le point P_0 étant arbitraire, nous avons enfin grâce à nos hypothèses la proposition suivante: Toutes les circonférences tracées dans le domaine $(\varDelta)$ se transforment avec leurs centres en circonférences de même rayon. Tous les segments tracés dans $(\varDelta)$ se transforment en des segments de même longeur passant par $(\varDelta')$. Donc les angles et les longeurs se conservent dans la transformation (α). D'où on en conclut sans aucune difficulté que la transformation représente un *déplacement* suivi *éventuellement* d'une symétrie. C. Q. F. D.

6. Les points de continuité des quatre dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$$

étant pantachiquement dissemés dans le domaine (D) nous nous trouvons autour du chacun d'eux dans les conditions du nr⁰ 4 et 5, nous avons donc autour de lui un voisinage dans lequel la transformation (α) représente un déplacement suivi ou non d'une symétrie. [Nous dirons: une *isomérie*].

Dans un tel voisinage-domaine les fonctions $f(x,y)$ et $g(x,y)$ auront la forme:

$$f(x,y) = Ax + By + L$$
$$g(x,y) = Cx + Dy + M.$$

Les constantes A, B, C, D coïncident avec des valeurs constantes des respectives dérivées:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial g}{\partial x}, \ \frac{\partial g}{\partial y},$$

on aura:

$$\begin{vmatrix} A, B \\ C, D \end{vmatrix} = 1 \text{ ou } -1.$$

Il-y-a donc dans le domaine (D) des domaines partiels pantachiquement disposés où la transformation (α) représente une *isomérie.*

Lorsque deux domaines de ce genre. Δ_1 et Δ_2 se recouvrent partiellement, on a dans leur réunion $\Delta_1 + \Delta_2$ les mêmes valeurs des constantes A, B, C, D, L, M.

En réunissant tous les domaines pareils en un domaine unique, on arrive à former les domaines partiels *saturés connexes* avec leurs valeurs respectives des constantes.

Ils seront en nombre fini ou ils constitueront une infinité *dénombrable* de domaines:

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

Dans chacun d'eux la transformations (α) aura la forme:

$$\begin{cases} u = A_i x + B_i y + L_i \\ v = C_i x + D_i y + M_i. \end{cases}$$

Les domaines Δ_i seront d'ailleurs sans points communs deux à deux.

Il faut démontrer qu'il n-y-aura qu'*un seul* domaine de ce genre.

Pour faciliter la démonstration de ce lemme, prouvons le seulement pour l'intérieur d'un rectangle R contenu avec sa frontière dans le domaine D; ce sera évidemment suffisant pour nous convaincre de la vérité du lemme.

Supposons donc que c'est le rectangle R qui se compose des domaines:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$$

saturés.

Soit F_i la frontière du domaine Δ_i et F la différence:

$$F = R - \Sigma \Delta_i$$

c'est-à-dire la frontière de la somme

$$\Sigma \Delta_i.$$

On a dans l'intérieur du domaine Δ_i:

$$(\omega) \qquad \begin{cases} u = f(x,y) = A_i x + B_i y + L_i \\ v = g(x,y) = C_i x + D_i y + M_i \end{cases}$$

et grâce à la continuité des fonctions f et g dans le domaine D, les formules (ω) seront aussi valables *sur la frontière* F_i.

Chacun des ensembles F_i est un ensemble fermé — il est même *parfait.* En effet, supposons que P_0 soit un point *isolé* de la frontière F_i. *Autour* du point P_0 et *en ce point lui-même* les formules (ω) seraient valables, donc, le point P_0 étant un point de continuité des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ appartiendrait nécessairement à l'intérieur du domaine Δ_i.

Quoique les formules (ω) soient valables pour la frontière F_i du domaine Δ_i on ne peut pas encore être certain que les valeurs des dérivées:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

soient données par les constantes A_i, B_i, C_i, D_i pour les points de *cette frontière.*

Il en sera ainsi pour une certaine éspèce des points-frontières que nous allons définir à l'instant.

Définition: Un point Q situé sur la frontière F_i sera appellé point-(a) du domaine Δ_i lorsque le fait suivant se fera remarquer:

Traçons par le point Q la croix des axes orthogonaux parallèles aux axes $\overline{O}x$ et $\overline{O}y$. La croix aura donc quatre branches différentes. Sur *deux* au moins entre elles et cela pour *deux ortogonales* entre elles, le point Q doit être un *point d'accumulation* de l'ensemble $\Delta_i + F_i$.

Supposons que Q soit un point-(α) du domaine Δ_i. Les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

existent en tout cas au point Q, mais grâce aux propriétés des points-(a) elles peuvent être calculées en n'utilisant que des valeurs de l'ensemble $\Delta_i + F_i$ où les formules (ω) sont valables.

C'est ce qui nous donne:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_i, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = B_i, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = C_i, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = D_i$$

pour les valeurs des dérivées au point Q.

Je vais montrer maintenant que les points-(a) du domaine Δ_i sont distribués *pantachiquement* sur sa frontière F_i. En effet. soit Q_0 un point quelconque appartenant à la frontière F_i et traçons autour de lui une circonférence C si petite que l'on veut. À l'intérieur de cette circonférence il y a des points du domaine Δ_i. — Soit P_0 l'un d'eux. Joignons le avec Q_0 par le segment $\overline{P_0 Q_0}$ et choisissons un carré avec P_0 comme centre, dont les côtés sont parallèles aux axes $\overline{0x}$ et $\overline{0y}$, contenu avec sa frontière entièrement dans cette circonférence et dans le domaine Δ_i.

Faisons-le assez petit pour qu'il reste toujours à l'intérieur de la circonférence C, quand on le déplace parallèlement à lui-même en faisant décrire à son centre le segment $\overline{P_0 Q_0}$. Pendant ce mouvement, à un certain moment des points de la frontière F_i apparaîssent pour la première fois sur sa périphérie. Soit M_0 un tel point-frontière. Il est clair que M_0 sera un point-(a) pour le domaine Δ_i. Les points-(a) se trouvent alors dans tout voisinage de chaque point de l'ensemble F_i.

Supposons maintenant qu'il-y-ait plusieurs domaines

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$$

Dans ce cas, l'ensemble F introduit plus haut ne peut pas être constitué par les seuls points de la frontière du rectangle R mais il y aura des points de l'ensemble F à l'intérieur de ce rectangle.

L'ensemble F est fermé — il est encore *parfait*. En effet son point *isolé* serait aussi un point isolé de la frontière de quelque domaine Δ_i, ce que nous avons reconnu impossible.

L'ensemble des points où les quatre dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

sont simultanément continues par rapport à l'ensemble F étant dissémé *pantachiquement* sur F et l'ensemble F étant *parfait* il-y-aura

de tels points à l'intérieur du rectangle R. Soit K_0 un tel point. Les dérivées sont alors continues au point K_0 par rapport à l'ensemble des valeurs qu'elles possèdent sur l'ensemble F. Or, dans tout voisinage du point K_0, s'il y a des points appartenant au domaine Δ_i on trouvera aussi des points de l'ensemble F_i et par conséquant les points-(a) du domaine Δ_i. Donc l'ensemble des valeurs que prennent les dérivées sur *la partie de l'ensemble* F contenue dans ce voisinage sera le même que l'ensemble qu'elles prennent dans ce voisinage *tout entier*. Le point K_0 sera donc un point de continuité des derivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

par rapport au domaine (D). Mais, dans ce cas nous nous trouvons à l'intérieur d'un certain domaine Δ_s ce qui évidamment n'est pas possible.

La démonstration, un peu longue, du 1er théorème fondamental est ainsi finalement achevée.

Sur la définition du diamètre et de l'écart transfini d'un ensemble.

Par

F. Leja.

1. Soit E un ensemble fermé et borné des points du plan. M. M. Fekete a introduit [1]) une constante nonnégative, liée à E, qu'il a appelé *le diamètre transfini* de E et désigné par $d(E)$. Cette constante s'est montrée importante dans des differéntes branches d'analyse [2]). Voici sa définition donnée par M. Fekete:

Soient

$$(1) \qquad \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$$

les affixes de $n+1$ points quelconques appartenant à l'ensemble E. Posons

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k|$$

et désignons par V_n la valeur maximum du produit $V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ à $\frac{n(n+1)}{2}$ facteurs lorsque les nombres (1) parcourent arbitrairement l'ensemble E. On démontre facilement que la suite

$$(2) \qquad d_n = V_n^{\frac{2}{n(n+1)}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

n'est pas croissante donc elle tend vers une limite car on a $d_n \geqq 0$. Cette limite est, par définition, le diamètre $d(E)$.

2. Considérons les nombres (1) et désignons par $\Delta_j(z)$ le polynôme suivant

---

[1]) Math. Z. t. 17, 1923, p. 228—249.

[2]) M. S. Mazurkiewicz et M[lle] H. Szmuszkowiczówna ont donné dernièrement une application de cette constante dans la théorie des suites des polynômes d'une variable (Bullet. de l'Acad. Polon., série A, 1933, p. 131—136).

(3) $$\Delta_j(z) = (z-\zeta_0)\dots(z-\zeta_{j-1})(z-\zeta_{j+1})\dots(z-\zeta_n).$$

Posons

(4) $$\Delta_j(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = |\Delta_j(\zeta_j)|, \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

et désignons par

(5) $$\min_{(j)} \Delta_j(\zeta_0, \zeta_1, \dots \zeta_n)$$

le plus petit des modules (4) et par

(6) $$\Delta_n = \max_{(E)} \{\min_{(j)} \Delta_j(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)\}$$

la valeur maximum de la fonction (5) lorsque les nombres (1) parcourent l'ensemble E.

J'ai démontré ailleurs [3]) que la suite

(7) $$\delta_n = \sqrt[n]{\Delta_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

tend vers une limite et que cette limite est égale à la limite de la suite (2).

On pourrait donc définir le diamètre transfini $d(E)$ d'un ensemble plan E comme la limite de la suite (7). Cette dernière définition met en évidence la liaison entre le diamètre $d(E)$ et les suites des polynômes d'une variable

$$P_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \dots + a_n^{(n)} z_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Pour s'en rendre compte il suffit d'observer que les polynômes (3) paraissent dans la formule bien connue de L a g r a n g e:

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} P_n(\zeta_j) \cdot \frac{\Delta_j(z)}{\Delta_j(\zeta_j)}.$$

3. Désignons par

(8) $$A_0, A_1, \dots, A_n$$

une suite de $n+1$ points quelconques de l'ensemble E et soit O un point fixe du plan appartenant à E ou non. Considérons les aires des $\dfrac{n(n+1)}{2}$ triangles que voici

(9) $$t_{jk} = OA_jA_k = \tfrac{1}{2} OA_j \cdot OA_k \cdot \sin \sphericalangle A_jOA_k, \quad j, k = 0, 1, \dots, n$$

et posons pour $j = 0, 1, \dots, n$

(10) $$T_j(A_0 A_1 \dots A_n) = t_{j,0} \cdot t_{j,1} \dots t_{j,j-1} \cdot t_{j,j-1} \dots t_{j,n}.$$

[3]) Bullet. de l'Acad. Polon.. série A, 1933 (sous presse).

Lorsque les points $A_0, A_1, \ldots A_n$ parcourent arbitrairement l'ensemble E le plus petit des produits (10) atteint son maximum qui sera désigné comme il suit

$$(11) \qquad T_n = \max_{(E)} \{ \min_{(j)} T_j(A_0 A_1 \ldots A_n) \}.$$

Posons

$$(12) \qquad t_n = \sqrt[n]{T_n} \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots;$$

on démontre que la suite (12) tend vers une limite

$$t_n \to t(E)$$

que j'ai appelé *l'écart transfini* de l'ensemble E par rapport au centre O [4]).

L'écart transfini joue un rôle important dans la théorie des suites des polynômes homogènes de deux variables

$$P_n(x, y) = a_{n0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + \ldots + a_{0n} y^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

4. Dans la note présente je vais donner une nouvelle démonstration de l'existence des limites des suites (7) et (12) qui définissent respectivement le diamètre et l'écart transfini d'un ensemble.

Pour ce but observons que notre proposition est une conséquence immédiate de deux lemmes que voici:

I. *Les suites* $\{\Delta_n\}$ *et* $\{T_n\}$ *définies par les formules* (6) *et* (11) *satisfont, quel que soit* $n = 1, 2, \ldots$ *et* $k < n$, *aux inégalités*

$$(13) \qquad \Delta_n \leqq \Delta_k \cdot \Delta_{n-k}.$$

$$(14) \qquad T_n \leqq T_k \cdot T_{n-k}.$$

II. *Si une suite* $\{a_n\}$, *où* $a_n \geqq 0$, *satisfait, quel que soit* $n = 1, 2, \ldots$ *et* $k < n$, *à l'inégalité*

$$(15) \qquad a_n \leqq a_k \cdot a_{n-k},$$

la nouvelle suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *tend vers une limite déterminée* [5]).

5. **Démonstration du lemme I.** Considérons d'abord la suite $\{T_n\}$ et la formule (11) et soit n un indice quelconque mais

---

[4]) C. R. t. 197, 1933, p. 21—22.

[5]) Une autre forme de ce lemme se trouve dans le livre de MM. G. Polya et G. Szegö: Aufgaben u. Lehrsätze., Berlin, 1925, t. I. p. 17, Aufgabe 98.

fixe et plus grand que 1. L'ensemble E étant fermé et borné on peut supposer que les points

(16) $$A_0, A_1, \ldots, A_n$$

aient été choisis dans E de sorte que la formule (11) se réduise à la suivante

(17) $$T_n = \min_{(j)} T_j(A_0, A_1, \ldots, A_n).$$

Soit k un indice remplissant la condition $1 \leqq k < n$ et $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_{n-k}}$ une suite de $n-k$ points quelconques choisis dans la suite (16). Posons

(18) $$V(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_{n-k}}) = \prod_{1 \leq p < q \leq n-k} t_{j_p j_q}$$

(19) $$T_{j_p}(A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_{n-k}}) = t_{j_p, j_1} \ldots t_{j_p, j_p-1} \cdot t_{j_p, j_p-1} \ldots t_{j_p, j_{n-k}},$$
$$\text{pour } p = 1, 2, \ldots, n-k,$$

et cherchons le plus grand de tous les produits (18) lorsque, n et k étant fixes, les points $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_{n-k}}$ parcourent l'ensemble (16). Sans nuir à la généralité ou peut supposer que, quels que soient les indices $j_1. j_2, \ldots, j_{n-k}$, on ait

$$V(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_{n-k}}) \leqq V(A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n).$$

Il s'en suit, en particulier, que, quel que soit $j = 0, 1, \ldots, n$ et quel que soit $l = k+1,\ k+2, \ldots, n$, on a

(20) $$V(A_j, A_{k+1} \ldots A_{l-1}, A_{l+1} \ldots A_n) \leqq V(A_{k+1}, A_{k+2} \ldots A_n).$$

Mais, étant d'après les formules (18) et (19)

$$V(A_j, A_{k+1} \ldots A_{l-1}, A_{l+1} \ldots A_n) =$$
$$= T_j(A_j, A_{k+1} \ldots A_{l-1}, A_{l+1} \ldots A_n) \cdot V(A_{k+1} \ldots A_{l-1} A_{l+1} \ldots A_n),$$
$$V(A_{k+1}, A_{k+2} \ldots A_n) = T_l(A_{k+1}, A_{k+2} \ldots A_n) \cdot V(A_{k+1} \ldots A_{l-1}, A_{l+1} \ldots A_n),$$

il suit de (20) que, quel que soit $j = 0, 1, \ldots, k$, et $l = k+1.\ k+2, \ldots n$, on a

$$T_j(A_j, A_{k+1} \ldots E_{l-1}, A_{l+1} \ldots A_n) \leqq T_l(A_{k+1}, A_{k+2} \ldots A_n).$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $t_{jl} = t_{lj}$ (l'aire du triangle OA_jA_l) on obtient d'après (19)

(21) $$T_j(A_j. A_{k+1}, \ldots A_n) \leqq T_l(A_j A_{k+1} \ldots A_n), \text{ pour} \begin{cases} j = 0, 1, \ldots, k, \\ l = k+1, k+2, \ldots n \end{cases}$$

Cela posé, considérons les $k+1$ points premiers de la suite (16) et formons les $k+1$ produits que voici:

$$T_j(A_0, A_1, \ldots A_k), \quad \text{où} \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Supposons que l'indice p, où $0 \leqslant p \leqslant k$, soit tel qu'on ait

$$T_p(A_0, A_1 \ldots A_n) = \min_{(j)} T_j(A_0, A_1 \ldots A_k)$$

donc, d'après la formule (11), on a

$$T_k \geqq T_p(A^0, A_1 \ldots A_n). \tag{22}$$

D'autre part, il suit des inégalités (21) qu'on a

$$T_p(A_p, A_{k+1}, \ldots A_n) = \min_{(l)} T_l(A_p, A_{k+1} \ldots A_n)$$

donc, d'après la formule (11), on a

$$T_{n-k} \geqq T_p(A_p, A_{k+1} \ldots A_n). \tag{23}$$

Obervons maintenant que la formule (17) entraîne l'inégalité suivante

$$T_n \leqq T_p(A_0\, A_1 \ldots A_n) = T_p(A_0\, A_1 \ldots A_k) \cdot T_p(A_p\, A_{k+1} \ldots A_n)$$

d'où il résulte, d'après (22) et (23), qu'on a

$$T_n \leqq T_k \cdot T_{n-k}.$$

L'inégalité (14) est donc démontrée. Par la même voie on peut prouver l'inégalité (13), donc le lemme I est démontré.

6. D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e II. Supposons qu'une suite $\{a_n\}$ à termes nonnégatifs satisfasse, quel que soit n et $k < n$, à l'inégalité

$$a_n \leqq a_k \cdot a_{n-k}. \tag{24}$$

Posons

$$\alpha = \liminf \sqrt[n]{a_n} \leqq \limsup \sqrt[n]{a_n} = \beta \tag{25}$$

et soit $\varepsilon > 0$ un nombre fixe quelconque; on peut lui faire correspondre un indice fixe m tel qu'on ait

$$\sqrt[m]{a_m} < \alpha + \varepsilon. \tag{26}$$

Posons $n = q \cdot m + r$, où r est un des nombres $0, 1, \ldots m-1$; il est clair que, si $n \to \infty$, on a $q \to \infty$. En vertu des inégalités (24) et (26) on a

$$a_n = a_{qm+r} \leqq a_{qm} \cdot a_r \leqq (a_m)^q \cdot a_r < (\alpha + \varepsilon)^{qm} a,$$

donc

$$\sqrt[n]{a_n} \leqq (\alpha + \varepsilon)^{\frac{qm}{qm+r}} \cdot \sqrt[n]{a_r}$$

d'où l'on obtient, en faisant tendre n vers l'infini, que

$$\beta \leqq \alpha + \varepsilon, \qquad \text{quel que soit } \varepsilon > 0.$$

Il en suit d'après (25) que $\alpha = \beta$ donc la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ a une limite déterminée.

7. Nous avons supposé que l'ensemble E soit plan. Observons que cette hypothèse n'est pas nécessaire. La notion du diamètre $d(E)$ et celle de l'écart $t(E)$ peut facilement être étendue aux ensembles situés dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique.

Par

Georges Giraud.

Introduction.

L'objet du présent travail est de trouver, pour une équation linéaire du type elliptique, une solution *u* qui prenne sur une partie de la frontière des valeurs données (condition du type de Dirichlet), et qui remplisse sur le reste de la frontière une condition du type généralisé de Neumann. On suppose que, aux points de la variété qui sépare les deux parties de la frontière, ces deux parties forment un angle: si l'on mène la droite suivant laquelle est prise la dérivée qui figure dans la condition de Neumann, cette droite est tangente à la partie sur laquelle on donne une condition de Dirichlet, et les sens sont tels que, sans connaître la fonction *u*, la condition du type de Dirichlet permet de calculer cette dérivée, c'est-à-dire que l'angle n'est pas rentrant; et l'on suppose que les conditions des deux types s'accordent le long de cette variété de séparation. Par exemple, si la fonction *u* doit être harmonique, on suppose que les deux parties de frontière sont orthogonales l'une à l'autre. La méthode exposée s'applique aussi au cas où, la frontière n'étant pas d'un seul tenant, ces deux parties n'ont pas de variété de séparation. Mr Zaremba a déjà traité, pour les fonctions harmoniques dans l'espace à trois dimensions, un problème mixte relatif à d'autres hypothèses [1]).

[1]) S. Zaremba, Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace, Bull. int. de l'Académie de Cracovie, juillet 1910, p. 313—344.

La méthode qui sera suivie, rend nécessaire de parler d'abord des équations du type elliptique dont l'inconnue est une fonction d'un point d'une variété close. De telles équations ont été considérées par M^r Picard[1]).

Chapitre I.

Problèmes relatifs à une variété close.

1. Définitions et hypothèses. Une variété *close* $\mathfrak{V}$ à m dimensions $(m > 0)$ est, par définition, un ensemble de points de la nature suivante: on peut trouver un nombre fini de régions $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$, situées sur $\mathfrak{V}$ et telles que tout point de $\mathfrak{V}$ soit *intérieur* à au moins une région; et d'autre part chaque point d'une région $\mathfrak{V}_\nu$ quelconque est défini par m coordonnées ou paramètres $x^1, x^2, \ldots,$ x^m, qui peuvent varier dans une région $\mathfrak{R}_\nu$, bornée et fermée, de l'espace euclidien. On complète la définition de $\mathfrak{V}$ en indiquant la région de $\mathfrak{R}_\nu$ qui correspond à des points communs à $\mathfrak{V}_\nu$ et à $\mathfrak{V}_\mu$, et en indiquant la transformation de coordonnées, qui permet, dans cette partie commune, de passer d'une représentation à l'autre, et cela pour tous les systèmes d'entiers μ et ν, distincts et au plus égaux à n; il peut d'ailleurs se faire que deux régions $\mathfrak{V}_\mu$ et $\mathfrak{V}_\nu$ soient sans points communs.

Nous supposons encore que si, dans la région commune à $\mathfrak{V}_\nu$ et à $\mathfrak{V}_\mu$, on exprime les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ propres à la région $\mathfrak{V}_\nu$ en fonctions des coordonnées $t^1, \ldots, t^m$ propres à la région $\mathfrak{V}_\mu$, les dérivées de ces fonctions existent et sont continues, et le jacobien $\dfrac{d(x^1, \ldots, x^m)}{d(t^1, \ldots t^m)}$ est positif, et cela quels que soient μ et ν, et sans qu'il y ait jamais lieu de changer l'ordre des coordonnées. On exprime cette propriété du jacobien en disant que $\mathfrak{V}$ est *orientable.*

Nous supposons encore que les dérivées secondes de $x^1, \ldots,$ x^m par rapport à $t^1, \ldots, t^m$ existent et sont continues, sauf peut-être aux points d'une certaine variété $\mathfrak{M}$, à $m-1$ dimensions, située sur $\mathfrak{V}$. La partie de $\mathfrak{M}$ qui est située dans $\mathfrak{V}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$, peut par hypothèse, être recouverte par un nombre *fini* de parties telles que chaque point de $\mathfrak{M}$ intérieur à $\mathfrak{V}_\nu$ soit intérieur à l'une d'elles et sur chacune desquelles les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$, dans le système

---

[1]) E. Picard, Ann. sc. de l'Ecole normale sup., t. 26, 1909, p. 9—17.

propre à $\mathfrak{V}_\nu$, sont des fonctions de $m-1$ paramètres, et les dérivées de ces fonctions existent et remplissent des conditions de Hölder avec un exposant donné $k(0 < k \leqslant 1)$ [1]), et les m jacobiens ne s'annulent nulle part simultanément; enfin les régions de variation de ces paramètres sont toutes bornées et fermées; nous n'excluons pas le cas où $\mathfrak{M}$ aurait des points multiples. Si $m=1$, $\mathfrak{M}$ se compose d'un nombre fini de points, mais nous supposerons dorénavant $m \geqslant 2$. Pour un point X quelconque, soit $r(X)$ la distance de l'image de ce point à l'image correspondante de $\mathfrak{M}$ dans celle des régions $\mathfrak{R}_\mu$, $\mathfrak{R}_\nu$,... contenant X et où cette distance est le plus petite; si aucune région $\mathfrak{V}_\nu$ contenant X ne possède de point de $\mathfrak{M}$, on prend r égal au plus grand des diamètres de tous les $\mathfrak{R}_\nu$. Nous supposons alors qu'on a, dans la région commune à $\mathfrak{V}_\mu$ et à $\mathfrak{V}_\nu$,

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^\beta \partial t^\gamma} = O(r^{k-1}) \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

où O est le symbole de Landau; ceci doit avoir lieu quels que soient μ et ν si la région commune existe. Il résulte de propositions antérieures que les dérivées des x^α par rapport aux t^β remplissent des conditions de Hölder avec l'exposant k si k est inférieur à *un* [2]).

Enfin nous nous donnons sur $\mathfrak{V}$ un tenseur symétrique $(g_{\alpha,\beta})$, tel que la forme quadratique de différentielles

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, g_{\alpha,\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

soit partout définie positive. On regarde $(g_{\alpha\beta})$ comme le tenseur fondamental qui nous permettra d'appliquer les règles du calcul tensoriel de Christoffel; on suppose que les dérivées des $g_{\alpha\cdot\beta}$, dans l'un quelconque de nos systèmes de coordonnées, existent et sont continues en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$, et l'on suppose en outre que, en conservant à r la même signification que plus haut, ces

[1]) Une fonction φ remplit une condition de Hölder si, quels que soient X et Y, on a

$$\varphi(X) - \varphi(Y) = O[L^k(X, Y)] \quad (k > 0),$$

où O est le symbole de Landau, et L reqrésente la distance des deux points.

[2]) Cela résulte de ce que $\Sigma_\beta \dfrac{\partial^2 x^\alpha}{(\partial t^\beta)^2} = O(r^{k-1})$; voir Bull. Société math. de France t. 61, 1933, p. 1—54. Cet article sera désigné par la lettre *h*.

dérivées valent $O(r^{k-1})$; enfin nous supposons que, sur $\mathfrak{V}$ entier, les $g_{\alpha,\beta}$ remplissent une condition de Hölder avec l'exposant k.

2. Opération du type elliptique sur une variété close. Sur la variété $\mathfrak{V}$, close et orientable, donnons-nous un autre tenseur symétrique $(a_{\alpha,\beta})$ tel que la forme quadratique

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

soit partout définie positive; nous supposons que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent des conditions de Hölder avec un exposant $h \leqslant k$. Soient encore (b^α) un tenseur donné, et c une fonction scalaire donnée; on suppose que les b^α et c sont continus en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$, et qu'on a

$$b^\alpha = O(r^{k-1}) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \quad c = O(r^{k-1}),$$

toujours avec la même signification pour r.

En désignant par D_α le symbole de la dérivation covariante de Christoffel, nous posons, en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$ et pour toute fonction u dont les dérivées jusqu'au second ordre existent et sont continues en ce point,

$$\mathfrak{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a^{\alpha,\beta} D_\beta \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + \Sigma_\alpha\, b^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + cu.$$

La définition de l'opération $\mathfrak{F}$ sera en outre étendue à certaines fonctions u dont les dérivées secondes n'existent pas; cette définition, qui a son origine dans un travail de Mr Zaremba, est entièrement semblable à celle qui a été donnée pour l'espace ordinaire [1]).

Soit encore f une fonction donnée d'un point de $\mathfrak{V}$; on suppose f continu en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$, et f vaut $O(r^{k-1})$. On dit que, pour l'équation $\mathfrak{F} u = f$, u est une solution *régulière* dans un certain ensemble ouvert, si u et ses dérivées premières existent et sont continus en tout point de l'ensemble, et si en outre l'équation est satisfaite en tout point appartenant à l'ensemble mais non situé sur $\mathfrak{M}$. On démontre, comme dans l'espace ordinaire, que les dérivées de u remplissent une condition de Hölder d'exposant k dans tout ensemble fermé appartenant à l'ensemble ouvert donné, pourvu que k soit inférieur à *un*.

[1]) Bull. des sciences mathématiques, t. 56, 1932, p. 248—272, 281—312, 316—352, et errata p. 384; spécialement chapitre I. Cet article sera désigné par la letre g.

3. Fonction de Green pour une variété close. Soient Δ le déterminant des $g_{\alpha,\beta}$ et D celui des $a^{\alpha,\beta}$; soit $A_{\alpha,\beta}$ le quotient par D du mineur algébrique de $a^{\alpha,\beta}$. Nous nommons *fonction de Green*, pour notre variété et pour l'opération $\mathfrak{F}$, une fonction $G(X, \Xi)$ qui jouit des propriétés suivantes:

1° Quand X et Ξ sont distincts sur $\mathfrak{B}$, G est, relativement à X, une solution régulière de l'équation $\mathfrak{F} G(X, \Xi) = 0$ (quand l'opération $\mathfrak{F}$ est appliquée à une fonction de deux points, nous supposons toujours qu'elle porte sur le premier point, ici X).

2° Quand X tend vers Ξ, nous supposons que

$$G(X, \Xi) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\Delta(\Xi)\, D(\Xi)}}\, F\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta)}\right],$$

où F désigne ce que nous avons nommé la solution élémentaire principale [1]) de l'équation $\Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - u = 0$; bien entendu, les x^α sont les coordonnées de X et les ξ^α sont celles de Ξ.

Nous démontrerons que, si la fonction de Green existe, elle est unique; en outre elle existe certainement si c est négatif en un point de $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$, et négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$.

Commençons par le cas où c remplit ces conditions. La démonstration de l'existence de G se fera en deux temps: d'abord nous prouverons que la fonction de Green existe pour l'opération $\mathfrak{F} u - \lambda^2 u$, où λ est une constante positive suffisamment grande; ensuite nous prouverons qu'il en est de même pour l'opération $\mathfrak{F}$.

Nous allons attribuer des poids aux différentes représentations valables en un point X donné de $\mathfrak{B}$. Nous ferons en sorte que les dérivées secondes de ce poids par rapport aux coordonnées propres à la représentation, existent et soient continues dans toute la région euclidienne correspondante. Pour cela, nous nous arrangeons d'abord pour que toutes les régions euclidiennes $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ soient des hypersphères; en augmentant au besoin n, cela est évidemment possible. Il existe un nombre positif ϱ, indépendant de X, tel que l'une au moins des hypersphères, de rayon 2ϱ, qui ont pour centres les différentes images de X, soit intérieure à l'hypersphère $\mathfrak{R}_\nu$ correspondante. Alors nous donnons le poids *un* à toute représentation valable

---

[1]) g, chap. II. Le symbole $z = o(y)$ signifie que z/y tend vers zéro.

dans l'hypersphère dont le centre est l'image correspondante de X et dont le rayon est 2ϱ; si l'hypersphère tangente à $\mathfrak{R}_\nu$ et dont le centre est l'image de X dans $\mathfrak{R}_\nu$, a un rayon R compris entre ϱ et 2ϱ, le poids de cette représentation est

$$\left(\frac{R-\varrho}{\varrho}\right)^3\left[6-15\frac{R-\varrho}{\varrho}+10\left(\frac{R-\varrho}{\varrho}\right)^2\right],$$

fonction nulle pour $R=\varrho$, égale à *un* pour $R=2\varrho$, et dont les dérivées premières et secondes s'annulent pour $R=\varrho$ et pour $R=2\varrho$; enfin, pour $R\leqslant\varrho$, le poids est zéro.

Pour chaque domaine $\mathfrak{B}_\mu$ qui contient Ξ, en supposant que $\mathfrak{M}$ n'existe pas, nous formons la fonction $H_\mu(X,\Xi)$, nulle quand la distance $L(X,\Xi)$, comptée dans la région $\mathfrak{R}_\mu$ correspondante, dépasse ϱ, nulle aussi quand X n'appartient pas à $\mathfrak{B}_\mu$, et qui, dans le cas contraire, a l'expression

$$H_\mu(X,\Xi)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\Delta(\Xi)D(\Xi)}}F_\lambda\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x^\alpha-\xi^\alpha)(x^\beta-\xi^\beta)}\right]\left[1-\frac{L^2(X,\Xi)}{\varrho^2}\right]^3,$$

où F_λ est la solution élémentaire principale de $\Sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}-\lambda^2u=0$. Nous multiplions cette fonction par le poids de la représentation valable en Ξ, nous additionnons tous ces produits et nous divisons par la somme des poids, qui est au moins égale à *un*. Le résultat est une fonction H définie dès que X et Ξ sont distincts et qui, quand X tend vers Ξ, devient infinie comme la fonction dont il s'agit d'établir l'existence. Nous posons

$$K(X,\Xi)=\mathfrak{F}H(X,\Xi)-\lambda^2H(X,\Xi);$$

on constate que, si X tend vers Ξ, K vaut $O[L^{h-m}(X,\Xi)]$. Posons maintenant

$$dV_X=\sqrt{\Delta(X)}\,d(x^1,x^2,\ldots,x^m),$$

de sorte que dV est invariant. On démontre, comme dans l'espace ordinaire (g, chap. II, § 4), l'existence d'une constante λ_0 telle que, pour $\lambda\geqslant\lambda_0$, la borne supérieure de $\int_{\mathfrak{B}}^{(m)}|K(A,\Xi)|\,dV_A$ soit inférieure à *un*. Si alors on pose

$$K^{(1)} = K, \quad K^{(n+1)}(X, \Xi) = \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} K^{(n)}(X, A)\, K(A, \Xi)\, dV_A,$$

on constate que la série

$$H(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} H(X, A)\, K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

dont les termes, à partir d'un certain rang, sont continus par rapport à X et à Ξ, converge uniformément et est une fonction de Green pour l'opération $\mathfrak{F}u - \lambda^2 u$ ($\lambda \geqslant \lambda_0$).

Si $\mathfrak{M}$ existe, cette démonstration disparaît. Dans ce cas, dans chacun des espaces euclidiens qui contiennent les régions $\mathfrak{R}_\mu$, nous prolongeons arbitrairement les $a^{\alpha,\beta}$, de façon seulement que la *solution élémentaire principale* (g, chap. II, spécialement § 4) de l'opération

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a^{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \lambda^2 u,$$

ainsi définie dans chaque espace euclidien, existe pour $\lambda > 0$. Nous désignons par $H_\mu(X, \Xi)$ le produit par $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(\Xi)}}\left[1 - \dfrac{L^2(X, \Xi)}{\varrho^2}\right]^3$ de celle de ces fonctions qui correspond à l'espace contenant $\mathfrak{R}_\mu$, tant qu'on a $L(X, \Xi) < \varrho$; H_μ sera nul dans le cas contraire. Nous en déduisons, comme plus haut, une fonction $H(X, \Xi)$. Pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$, on constate que $H(X, \Xi)$ et les $\partial H/\partial x_\alpha$ ont des limitations $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$ et $O[L^{1-m}(X, \Xi)]$, indépendantes de λ; quand $L(X, \Xi)$ reste supérieur à une borne positive quelconque, H et ses dérivées de tout ordre par rapport aux x^α tendent uniformément vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Si alors on définit K comme plus haut, on constate encore que $\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} |K(A, \Xi)|\, dV_A$, pour λ assez grand, reste inférieur à une constante positive donnée (*voir* h, chap. II, § 6). En prenant cette constante inférieure à *un*, on en déduit que la série formée comme plus haut converge uniformément et représente une fonction de Green pour l'opération $\mathfrak{F}u - \lambda^2 u$.

Soit G_λ cette fonction de Green. Nous cherchons la fonction G, dont l'existence a été annoncée, parmi les fonctions

$$G(X, \Xi) = G_\lambda(X, \Xi) + \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \sigma(A, \Xi)\, dV_A,$$

où σ est une inconnue, continue quand les deux points sont distincts. L'équation $\mathfrak{F}\, G = 0$ s'écrit alors

$$\sigma(X, \Xi) - \lambda^2 \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \sigma(A, \Xi)\, dV_A = \lambda^2 G_\lambda(X, \Xi),$$

équation du type de Fredholm. Pour prouver que la solution existe, il suffit de prouver que l'équation

$$\tau(X) - \lambda^2 \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \tau(A)\, dV_A = 0$$

n'a que la solution zéro; or si

$$u(X) = -\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \tau(A)\, dV_A,$$

notre équation exprime que u est une solution, régulière dans tout $\mathfrak{V}$, de l'équation $\mathfrak{F}u = 0$; cette fonction est nulle, car elle ne peut atteindre ni maximum positif, ni minimum négatif (h, chap. II, §§ 13 et 14); comme l'équation en τ s'écrit aussi $\tau + \lambda^2 u = 0$, τ est nul aussi, C. Q. F. D. Donc la fonction σ existe, et l'on vérifie que G est une fonction de Green.

Pour prouver, dans la même hypothèse sur c, que G est unique, il suffit de remarquer que la différence de deux fonctions de Green est une solution de l'équation homogène, et cette solution est régulière même quand X est en Ξ (h, chap. II, § 16); cette différence est donc nulle.

Enfin, si nous levons notre restriction relative à c, soit G^* la fonction de Green relative à l'opération $\mathfrak{F}u - \chi u$, où χ satisfait aux mêmes conditions que c et est supérieur à c dans tout $\mathfrak{V} - \mathfrak{M}$; on démontre alors que, si G existe, cette fonction satisfait aux deux équations de Fredholm

$$G(X, \Xi) = G^*(X, \Xi) + \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G^*(X, A)\, \chi(A)\, G(A, \Xi)\, dV_A =$$

$$= G^*(X, \Xi) + \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G(X, A)\, \chi(A)\, G^*(A, \Xi)\, dV_A,$$

et chacune de ces équations a une seule solution; réciproquement, toute solution d'une de ces équations est une fonction de Green

pour l'opération $\mathfrak{F}$. La démonstration est semblable à celle qui concerne la solution élémentaire principale dans l'espace ordinaire (h, chap. III, § 2; g, chap. II, § 12).

4. Problème relatif à la variété close. On peut se donner une fonction f remplissant sur tout $\mathfrak{B}$ les hypothèses indiquées (§ 2), et se proposer de trouver une fonction u, solution partout régulière de l'équation

$$\mathfrak{F}u = f.$$

Ce type de problèmes est spécial aux variétés closes, et a été considéré par M[r] Picard [1]).

Si c est négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$, et négatif en au moins un de ces points, la solution existe et est unique, et elle a pour expression

$$u(X) = -\int_{\mathfrak{B}}^{(m)} G(X, A) f(A)\, dV_A,$$

G étant la fonction de Green.

Dans le cas général, soit χ une fonction remplissant les mêmes conditions que c, et supérieure à c dans tout $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$; alors le problème équivaut à l'équation de Fredholm

$$u(X) = -\int_{\mathfrak{B}}^{(m)} G^*(X, A)\,[f(A) - \chi(A)\, u(A)]\, dV_A,$$

où G^* est la fonction de Green relative à l'opération $\mathfrak{F}u - \chi u$. Si le problème homogène a p solutions linéairement indépendantes ($p > 0$), soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les solutions linéairement indépendantes du problème homogène adjoint, c'est-à-dire de l'équation

$$v(X) - \int_{\mathfrak{B}}^{(m)} v(A)\, \chi(A)\, G^*(A, X)\, dV_A = 0;$$

alors les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème donné sont

$$\int_{\mathfrak{B}}^{(m)} f v_n\, dV = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

---

1) E. Picard, loc. cit.

On remarquera que le cas d'une solution unique est précisément celui où l'opération $\mathfrak{F}$ admet une fonction de Green, et qu'alors u peut s'exprimer comme dans le cas où c est négatif partout.

Si c est identiquement nul, le problème homogène correspondant au problème donné, c'est-à-dire le problème où $f = 0$, admet pour solution une constante quelconque, et n'en admet pas d'autre.

5. Autres problèmes. Soit maintenant $\mathfrak{D}$ un domaine donné sur $\mathfrak{V}$; on suppose que sa frontière $\mathfrak{S}$ remplit les mêmes hypothèses que $\mathfrak{M}$, et en outre $\mathfrak{S}$ n'a pas de point multiple. On peut se poser, à propos de ce domaine et de l'équation $\mathfrak{F}u = f$, les mêmes types de problèmes que dans l'espace euclidien.

Le premier type consiste, étant donnée une fonction φ continue sur $\mathfrak{S}$, à trouver une solution, régulière dans $\mathfrak{D}$, de l'équation donnée, qui soit continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et égale à φ sur $\mathfrak{S}$ (notre méthode, comme dans l'espace euclidien, entraînera parfois des restrictions pour φ); c'est le type de Dirichlet.

Dans le deuxième type, on se donne deux fonctions ψ et φ continues sur $\mathfrak{S}$. La fonction ψ sert à définir une opération qui sera nommée Θu. Les représentations paramétriques que nous avons choisies, définissent une orientation du domaine $\mathfrak{D}$; nous choisissons pour $\mathfrak{S}$ l'orientation associée à celle-ci [1]), et nous posons, pour $\mathfrak{S}$,

$$d\,S = \sqrt{\Delta\, \Sigma_{\alpha,\beta} (-1)^{(m-1)(\alpha+\beta)} g^{\alpha,\beta} d(x^{\alpha+1}, \ldots, x^{\alpha-1})\, d(x^{\beta+1}, \ldots, x^{\beta-1})},$$
$$\overline{\omega}_\alpha\, d\,S = (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \sqrt{\Delta}\, d(x^{\alpha+1}, \ldots, x^{\alpha-1}),$$

où $(x^{\alpha+1}, \ldots, x^{\alpha-1})$ désigne le résultat obtenu en permutant circulairement les coordonnées, de façon à amener x^α en tête, puis en supprimant x^α. Par définition, $d\,S$ est la *mesure* d'un élément de $\mathfrak{S}$, et les $\overline{\omega}_\alpha$ sont les *cosinus directeurs de la normale extérieure.* On voit que $d\,S$ est invariant, et les $\overline{\omega}_\alpha$ sont les composantes covariantes d'un tenseur: on a $\Sigma_{\alpha,\beta} g^{\alpha,\beta} \overline{\omega}_\alpha \overline{\omega}_\beta = 1$. Par définition, si les dérivées d'une fonction u existent et sont continues dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, on a, sur $\mathfrak{S}$,

$$\Theta u = \Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta}\, \overline{\omega}_\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\beta} + \psi u,$$

de sorte que Θu est invariant. Pour étendre cette définition à d'autres fonctions u, désignons par Y un point de $\mathfrak{S}$, par y^α ses coor-

[1]) Ann. sc. Ec. norm. sup., t. 43, 1926, p. 1 — 128, spécialement chap. I, § 4, p. 9.

données ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), et par Y_t un point qui a pour coordonnées des quantités

$$y^\alpha - t\Sigma_\beta a^{\alpha,\beta}\bar{\omega}_\beta + O(t^{h+1}) \quad (t > 0,\ h > 0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

par définition

$$\Theta u(Y) = \lim_{t \to 0} \frac{u(Y) - u(Y_t)}{t} + \psi(Y) u(Y),$$

pourvu que la limite existe et soit indépendante des quantités $O(t^{h+1})$. Cela posé, le deuxième type de problèmes consiste à trouver, pour l'équation $\mathfrak{F}u = f$, une solution u régulière dans $\mathfrak{D}$, continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et satisfaisant sur $\mathfrak{S}$ à la condition $\Theta u = \varphi$.

Il convient de traiter d'abord ce second type de problèmes. Si c est négatif sur tout $\mathfrak{B}$, de façon que la fonction G de Green, relative à $\mathfrak{B}$, existe, on remarque que le potentiel de simple couche

$$u(X) = 2 \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, A)\, \sigma(A)\, d S_A$$

est une solution, régulière dans $\mathfrak{D}$, de l'équation $\mathfrak{F}u = 0$; cette solution est continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et elle satisfait sur $\mathfrak{S}$ à la condition

$$\Theta u(Y) = \sigma(Y) + 2 \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, A)\, \sigma(A)\, d S_A,$$

exactement comme dans l'espace euclidien. Dès lors notre second type de problèmes se résout, dans les hypothèses indiquées plus haut, exactement comme dans l'espace euclidien (h, chap. III, § 7); la notion de fonction de Green relative au domaine $\mathfrak{D}$ et aux opérations $\mathfrak{F}$ et Θ se définit comme dans l'espace euclidien, et la formule de Green reste également valable.

Pour le premier type de problèmes, on formera, comme dans l'espace euclidien (h, chap. III, § 9), la fonction de Green relative au domaine $\mathfrak{D}$ et à l'opération $\mathfrak{F}u - \chi u$. La solution du problème posé en résulte si les dérivées partielles de φ existent et remplissent des conditions de Hölder.

Si les dérivées partielles des $a^{\alpha,\beta}$ existent et remplissent, ainsi que les b^α, des conditions de Hölder au voisinage de $\mathfrak{S}$, on peut traiter, comme dans l'espace euclidien, le cas où φ est continu sans plus, car la fonction de Green d'une opération $\mathfrak{F}w - \chi w$ peut être

dérivée par rapport au second point, ce qui permet de lui appliquer l'opération Z définie plus loin.

Disons aussi qu'on peut traiter, comme dans l'espace euclidien, un troisième type de problèmes: si, dans la définition de Θu, au lieu de faire tendre la direction YY_t vers la direction indiquée (dite parfois *transversale* à $\mathfrak{S}$), on la fait tendre vers une direction non tangente quelconque, ce troisième type de problèmes consiste à se donner sur $\mathfrak{S}$ le résultat de cette nouvelle opération Θ appliquée à u[1]).

6. Opération adjointe. Par définition, on a

$$\mathfrak{G}v = \Sigma_{\alpha,\beta} D_\alpha\left(a^{\alpha,\beta}\frac{\partial v}{\partial x^\beta}\right) - \Sigma_\alpha D_\alpha\left[\left(b^\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a^{\alpha,\beta}}{\partial x^\beta}\right)v\right] + cv,$$

pourvu que les coefficients de v et de ses dérivées premières et secondes existent et remplissent les mêmes hypothèses que les coefficients correspondants dans $\mathfrak{F}$. Si alors la fonction $G(X, \Xi)$ de Green existe sur la variété $\mathfrak{V}$ pour l'opération $\mathfrak{F}$, elle existe aussi pour $\mathfrak{G}$, et elle s'obtient en échangeant les rôles des deux points dans G. L'opération Z *(dzêta)* correspondant à Θ est alors

$$Zv = \Sigma_{\alpha,\beta}\bar{\omega}_\alpha D_\beta(a^{\alpha,\beta}v) + (\psi - \Sigma_\alpha b^\alpha \bar{\omega}_\alpha)v.$$

Ce qui a été dit antérieurement pour l'espace euclidien peut se répéter maintenant pour $\mathfrak{V}$.

Chapitre II.

Problèmes mixtes.

1. Introduction d'une symétrie. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné de l'espace euclidien à m dimensions ($m \geqslant 2$), ou un domaine pris sur la variété $\mathfrak{V}$, close et orientable, définie au chapitre I, paragraphe 1. On suppose que la frontière $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{D}$ existe et satisfait aux hypothèses précédemment énoncées pour $\mathfrak{M}$ (chap. I, § 2); en outre $\mathfrak{S}$ n'a pas de points multiples. Nous admettons désormais que $\mathfrak{M}$ comprend la totalité de $\mathfrak{S}$, et peut-être d'autres points.

Nous allons définir une nouvelle variété $\mathfrak{W}$, close et orientable, qui contiendra $\mathfrak{D}$. En dehors de $\mathfrak{D}$, cette variété comprend un domaine $\mathfrak{E}$

[1]) Deux articles, non encore parus, développent la solution d'abord pour deux et trois dimensions, puis pour m dimensions; on trouvera des indications dans une note, *Comptes rendus*, t. 195, 1932, p. 454—456.

identique à $\mathfrak{D}$; mais l'orientation choisie sur $\mathfrak{E}$ est opposée à l'orientation choisie sur $\mathfrak{D}$, ce qui s'obtient par le changement de coordonnée $x'^1 = -x^1$, dans chaque région $\mathfrak{V}_\nu$ qui contient des points de $\mathfrak{D}$, les autres coordonnées ne changeant pas Nous ferons en sorte que les composantes du tenseur fondamental $(g_{\alpha,\beta})$ pour $\mathfrak{E}$ se déduisent des composantes relatives à $\mathfrak{D}$ par ce changement de coordonnée. $\mathfrak{S}$ est regardé sur $\mathfrak{W}$ comme la frontière entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$. Il reste à trouver des représentations paramétriques, en nombre fini, qui conviennent pour les points de $\mathfrak{S}$ et de son voisinage dans $\mathfrak{D}$ et dans $\mathfrak{E}$. Il a été démontré (h, chap. IV, §§ 1 et 2) que, Y étant un point donné de $\mathfrak{S}$, on peut trouver un système de variables $y^1, y^2, \ldots y^m$, valable pour tous les points assez voisins de Y dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et tel que, dans ce voisinage de Y, $\mathfrak{S}$ soit identique à la variété $y^m = 0$, et $\mathfrak{D}$ identique à l'ensemble $y^m > 0$; si en outre on désigne par $a'^{\alpha,\beta}$ et par b'^{α} les composantes des tenseurs $(a^{\alpha,\beta})$ et (b^α) pour ces nouvelles variables, on a

$$a'^{m,\alpha} = 0 \quad \text{pour} \quad y^m = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Nous avons besoin qu'en outre les dérivées secondes des y^α par rapport aux anciennes variables existent en tout point de $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}$ et admettent des limitations $O(r^{h-1})$. Il nous suffit pour cela de modifier légèrement la formation des fonctions y^α. Comme précédemment (h, chap. IV, § 1, p. 43 et 44), nous nous ramenons au cas où les anciennes variables sont telles qu'au voisinage de Y, $\mathfrak{S}$ coïncide avec $x^m = 0$, et $\mathfrak{D}$ avec $x^m > 0$. Ensuite nous remplaçons l'équation du type elliptique à laquelle y^α doit satisfaire dans $\mathfrak{D}$ au voisinage de Y, par (*voir* h, chap. IV, § 1, p. 45)

$$\Sigma_{\beta,\gamma} a^{\beta,\gamma} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \lambda^{-2} y^\alpha = -\lambda^{-2}(x^\alpha + \psi_\alpha x^m);$$

dans cette équation, les coefficients de l'inconnue y^α et de ses dérivées premières et secondes, ainsi que le second membre, remplissent des conditions de Hölder avec l'exposant h; par conséquent les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$ existent en tout point du voisinage de Y dans $\mathfrak{D}$, et les dérivées $\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}$ remplissent des conditions de Hölder, avec l'exposant h, dans le même voisinage, pourvu que h soit < 1. On en déduit que $\Sigma_{\beta,\gamma} a^{\beta,\gamma} \dfrac{\partial^2 (x^m y^\alpha)}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \lambda^{-2} x^m y^\alpha$ remplit, dans le mê-

me voisinage, une condition de Hölder avec l'exposant $h < 1$, et par suite (h, chap. IV, § 4) les dérivées secondes de $x^m y^\alpha$ remplissent des conditions de Hölder avec le même exposant; donc les $\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$ valent $O[(x^m)^{h-1}]$ $(h < 1)$, et notre but est atteint. Puisque tout point Y de $\mathfrak{S}$ est intérieur à une région de $\mathfrak{S}$ où une telle représentation est valable, un nombre fini de telles représentations suffit pour tout $\mathfrak{S}$ et son voisinage dans $\mathfrak{D}$. Par définition maintenant, si $y^1, y^2, \ldots, y^m$ sont, dans une telle représentation, les paramètres d'un point de $\mathfrak{D}$, ce qui entraîne que y^m est positif, $y^1, y^2, \ldots, -y^m$ sont les paramètres du point correspondant de $\mathfrak{E}$. Avec notre définition sur l'orientation choisie pour $\mathfrak{E}$, on vérifie que tous les jacobiens sont positifs, et par suite la variété $\mathfrak{W}$ aiusi définie est orientable.

Par suite de la condition posée plus haut pour $\mathfrak{D}$ et pour $\mathfrak{E}$, les composantes $g'_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$ du tenseur fondamental, avec les paramètres $y^1, y^2, \ldots, y^m$, doivent être des fonctions impaires de y^m, et toutes les autres composantes doivent être des fonctions paires de y^m. Pour que les $g'_{\alpha,\beta}$ restent continus, il faut donc modifier le tenseur fondamental de façon que les $g'_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$ soient nuls sur $\mathfrak{S}$. Nous définirons des fonctions $g^*_{\alpha,\beta}$ dans chaque domaine où un système de variables y^α, du type qui vient d'être introduit, est valable; ces fonctions doivent satisfaire, dans ce domaine, à toutes les hypothèses relatives au tenseur fondamental (chap. I, § 1), et en outre les $g^*_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$ doivent être des fonctions impaires de y^m (ce qui entraîne leur nullité pour $y^m = 0$), et les autres $g^*_{\alpha,\beta}$ doivent être des fonctions paires de y^m; sauf ces conditions, les $g^*_{\alpha,\beta}$ sont arbitraires dans chacun de ces domaines. Dans chaque région commune à $\mathfrak{D}$ et à l'une des régions $\mathfrak{B}_\nu$, on prend les $g^*_{\alpha,\beta}$ égaux, dans le système des variables propres à cette région, aux composantes $g_{\alpha,\beta}$ du tenseur fondamental qui était donné sur $\mathfrak{B}$; dans la région correspondante de $\mathfrak{E}$, les $g^*_{\alpha,\beta}$ se déduisent des précédents par le changement de coordonnée $x'_1 = -x_1$. Dans les régions où interviennent les variables y^α, les différents systèmes de fonctions $g^*_{\alpha,\beta}$ ne se ramènent pas les uns aux autres par les relations entre les variables correspondantes: mais ayant défini le poids comme plus haut (chap. I, § 3), nous multiplions chaque système de $g^*_{\alpha,\beta}$ par le poids correspondant; les ayant tous ramenés à un même système de variables, nous ajoutons ces produits et nous divisons par la

somme des poids: le résultat de cette opération est un tenseur qui jouit sur $\mathfrak{W}$ de toutes les propriétés voulues, et que nous nommerons désormais $(g_{\alpha,\beta})$.

Cette modification du tenseur fondamental se répercute sur la dérivation covariante. Nous modifions donc aussi le tenseur (b^α), de façon que l'opération $\mathfrak{F}$ donnée dans $\mathfrak{D}$ ne soit pas altérée.

Il reste à définir sur tout $\mathfrak{W}$ l'opération $\mathfrak{F}$, qui, par définition, coïncide dans $\mathfrak{D}$ avec l'opération donnée; pour le point de $\mathfrak{E}$ qui correspond à un point donné de $\mathfrak{D}$, elle se déduit de l'opération donnée par le changement de variable $x'^1 = -x^1$. Cela entraîne qu'avec les paramètres $y^1, y^2, \ldots, y^m$ qui conviennent pour une région de $\mathfrak{S}$, les $a'^{m,\alpha} (\alpha \neq m)$ et b'^m sont des fonctions impaires de y^m, et toutes les autres fonctions $a'^{\alpha,\beta}$, b'^α et c' sont des fonctions paires de y^m.

Par définition, un point de $\mathfrak{D}$ et son correspondant dans $\mathfrak{E}$ sont dits *symétriques* l'un de l'autre. Un point de $\mathfrak{S}$ est son propre symétrique.

On conçoit que cette symétrie a des propriétés remarquables. Si notre opération $\mathfrak{F}$ admet, pour $\mathfrak{W}$ entier, une fonction de Green $G(X, \Xi)$, et si l'on distingue par un accent deux points X et X' symétriques l'un de l'autre, on a $G(X, \Xi) = G(X', \Xi')$. La fonction $G(X, \Xi) - G(X, \Xi')$ est donc la fonction de Green relative aux problèmes du premier type dans le domaine $\mathfrak{D}$. La fonction $\Theta[G(Y, \Xi) + G(Y, \Xi')]$ est nulle si la fonction ψ, qui intervient dans la définition de Θ sur $\mathfrak{S}$, est nulle.

2. Problème mixte, énoncé et préliminaires de la solution. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné de l'espace euclidien à m dimensions $(m \geqslant 2)$, ou un domaine pris sur la variété $\mathfrak{V}$ du chapitre I, paragraphe 1. On suppose que sa frontière se compose de deux ensembles ouverts $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$, et de leur frontière commune $\mathfrak{C}$, qui remplit les conditions suivantes (le cas où $\mathfrak{C}$ n'existe pas est compris dans nos considérations, mais il peut aussi se traiter autrement): on peut trouver sur $\mathfrak{C}$ un nombre fini de régions fermées, telles que chaque point de $\mathfrak{C}$ soit intérieur à au moins une de ces régions; dans chaque région, les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^m$ d'un point de $\mathfrak{C}$ sont des fonctions de $m-2$ paramètres dont le champ de variation est borné et fermé; les dérivées des x^α existent par hypothèse, et remplissent des conditions de Hölder, et les $\dfrac{m(m-1)}{2}$ jacobiens ne s'annulent simultanément nulle part; on suppose que $\mathfrak{C}$

n'a pas de point multiple (ces hypothèses se simplifient d'une façon évidente pour $m=2$). Ensuite on suppose qu'on peut recouvrir $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$ par un nombre fini de régions fermées, telles que tout point de $\mathfrak{S}$ soit intérieur à au moins l'une d'elles et telles que, dans chaque région, les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^m$ d'un point de $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$ soient des fonctions de $m-1$ paramètres dont le champ de variation est borné et fermé; les dérivées des x^α existent et remplissent des conditions de Hölder, et les m jacobiens ne s'annulent simultanément nulle part; enfin $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$ n'a pas de point multiple. Les hypothèses sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ sont exactement les mêmes que les hypothèses sur $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$, et en outre $\mathfrak{T}$ n'a pas de point commun avec $\mathfrak{S}$. Enfin considérons les paramètres directeurs $\bar{\omega}_\alpha$ de la normale à $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ en un point Y variable sur $\mathfrak{C}$, cette normale étant dirigée vers l'extérieur de $\mathfrak{D}$: on suppose que la direction *transversale* $\Sigma_\beta a^{\alpha,\beta}\bar{\omega}_\beta$ est tangente au prolongement de $\mathfrak{S}$ au delà de $\mathfrak{T}$ (par conséquent l'angle de $\mathfrak{S}$ et de $\mathfrak{T}$ n'est pas rentrant); si les $\bar{\omega}'_\alpha$ sont les paramètres directeurs de la normale à $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$, on a donc $\Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta}\bar{\omega}_\alpha\bar{\omega}'_\beta=0$.

$\mathfrak{D}$ étant ainsi défini, nous nous donnons sur $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$ une fonction φ^* dont les dérivées existent et remplissent des conditions de Hölder; sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$, nous nous donnons deux fonctions ψ et φ, continues sans plus, dont la première sert à définir sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ l'opération Θ. Aux points de $\mathfrak{C}$, la valeur de Θu, relative à $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ pour toute fonction u qui prend sur $\mathfrak{S}$ les valeurs φ^*, peut se calculer à l'aide de φ^*: nous supposons que cette valeur est égale à φ. Le problème mixte que nous avons en vue est le suivant:

Trouver une solution u, régulière dans $\mathfrak{D}$, de l'équation

$$\mathfrak{F}u=f,$$

telle que u soit continu dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$, et telle en outre qu'on ait

$$u=\varphi^* \quad \text{sur} \quad \mathfrak{S}+\mathfrak{C}, \quad \Theta u=\varphi \quad \text{sur} \quad \mathfrak{T}+\mathfrak{C}.$$

Pour résoudre ce problème, nous commençons par former, sur $\mathfrak{V}$ ou dans l'espace euclidien, un domaine borné $\mathfrak{D}_1$, contenant $\mathfrak{D}+\mathfrak{T}$, et dont la frontière $\mathfrak{S}_1$ contient $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$; en outre cette frontière $\mathfrak{S}_1$ doit satisfaire aux hypothèses antérieures relatives à $\mathfrak{M}$ (chap. I, § 2) et être dépourvue de points multiples; d'après nos hypothèses, la formation de $\mathfrak{D}_1$ est possible. Nous formons ensuite, à partir de $\mathfrak{D}_1$, la variété $\mathfrak{W}$ dont il a été parlé au para-

graphe 1, et nous définissons, sur $\mathfrak{W}$ entier, le tenseur fondamental $(g_{\alpha,\beta})$ et l'opération $\mathfrak{F}$, comme il a été expliqué.

3. Fonction de Green d'un problème mixte. Nous nommerons maintenant $\mathfrak{M}$ l'ensemble de $\mathfrak{S}_1$, de la partie de l'ancienne variété $\mathfrak{M}$ située dans $\mathfrak{D}_1$, et de la variété symétrique de celle-ci. Soit $\mathfrak{T}'$ la variété symétrique de $\mathfrak{T}$; $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}+\mathfrak{T}'$ est la frontière d'un domaine pris sur $\mathfrak{W}$ et formé de $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{D}$ et du domaine $\mathfrak{D}'$ symétrique de $\mathfrak{S}$. Nous définissons sur $\mathfrak{T}'$ l'opération Θ en prenant pour ψ toujours les mêmes valeurs en deux points symétriques.

Nous supposons d'abord que c est négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, et ψ positif ou nul sur tout $\mathfrak{T}$; en outre nous supposons qu'ou bien c est négatif en un point de $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, ou bien ψ est positif en un point de $\mathfrak{T}$. Nous allons prouver *qu'il existe alors une et une seule fonction $F^*(X, \Xi)$, solution régulière dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'+\mathfrak{S}-\Xi$ de l'équation $\mathfrak{F}F^*=0$, devenant infinie à la façon des fonctions de Green quand X tend vers Ξ, pourvu que Ξ appartienne à $\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'+\mathfrak{S}$, et qui, quand X vient sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}-\Xi$, satisfait à la condition $\Theta F^*=0$.*

Nous remarquons que la variété $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}$ satisfait aux hypothèses dans lesquelles nous savons résoudre le second type de problèmes (chap. I, § 5) pour chacun des domaines qu'elle sépare; cela découle de ce que, dans le système des variables y^α adoptées pour un point de $\mathfrak{C}$ et pour son voisinage (§ 1), on a $\overline{\omega}_m=0$. Par conséquent l'existence de F^* est un cas particulier de ce qui a déjà été vu (chap. I, § 5), et l'on sait aussi que F^* est unique.

Il est évident qu'on a $F^*(X', \Xi')=F^*(X, \Xi)$. Alors la fonction

$$F(X, \Xi)=F^*(X, \Xi)-F^*(X, \Xi'),$$

où X et Ξ appartiennent à $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$, est continue relativement à l'ensemble des deux point tant que ceux-ci sont distincts; elle est une solution régulière de l'équation $\mathfrak{F}F=0$ dans le domaine $\mathfrak{D}-\Xi$; elle s'annule quand l'un des points X et Ξ vient sur $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$, les deux points restant distincts, et elle remplit la condition $\Theta F=0$ en tout point X de $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}-\Xi$; enfin $F-G$ est continu même quand les deux points coïncident dans $\mathfrak{D}$. Cette fonction F est la *fonction de Green de notre problème mixte* par définition.

Les fonctions $F(X, \Xi)$ qui rempliraient toutes ces conditions, même en supprimant les restrictions imposées plus haut à c et à ψ,

se nommeront encore des *fonctions de Green*, pour les problèmes mixtes correspondants.

4. Solution du problème mixte. Nous commençons par construire une fonction w, prenant les valeurs φ^* sur $\mathfrak{S}$; cette fonction et ses dérivées devront être continues dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$, et l'on devra pouvoir lui appliquer l'opération $\mathfrak{F}$ en tout point de $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, le résultat de cette opération devant être $O(r^{k-1})$. Pour cela, on prolonge φ^* sur la totalité de $\mathfrak{S}_1$, de façon que les dérivées de cette fonction existent et remplissent partout des conditions de Hölder; d'après les démonstrations auxquelles nous avons renvoyé à propos du premier type de problèmes (chap. I, § 5), nous savons trouver dans $\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}_1$ une fonction continue w, égale à φ^* sur $\mathfrak{S}_1$, et telle que, par exemple, on ait dans $\mathfrak{D}_1$,

$$\mathfrak{F}w - cw = 0,$$

car certainement cette équation possède effectivement une telle solution; on a bien $\mathfrak{F}w = O(r^{k-1})$, et les dérivées de w remplissent des conditions de Hölder dans $\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}_1$ (h, chap. IV, § 2). Alors la fonction $v = u - w$ doit être dans $\mathfrak{D}$ une solution régulière de de $\mathfrak{F}v = f - \mathfrak{F}w$, elle doit s'annuler sur $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$ et remplir sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ la condition $\Theta v = \varphi - \Theta w$, dont le second membre, d'après nos hypothèses, est continu et s'annule sur $\mathfrak{C}$.

Si l'on prolonge une solution v de ce problème dans la région $\mathfrak{D}'+\mathfrak{T}'$, en décidant que ses valeurs en deux points symétriques sont opposées, la fonction v est solution, régulière (h, chap. II, § 16) dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{D}'$, de l'équation

$$\mathfrak{F}v = f_1,$$

où f_1 est une fonction qui prend toujours des valeurs opposées en deux points symétriques, et qui coïncide dans $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$ avec $f-\mathfrak{F}w$; sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}$, on a $\Theta v = \varphi_1$, où φ_1 prend toujours des valeurs opposées en deux points symétriques et coïncide sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ avec $\varphi - \Theta w$, de sorte que φ_1 est continu sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}$. Cette fonction v est donc une solution d'un problème du second type. Soient $c-\chi$ et $\psi-\omega$ deux fonctions remplissant respectivement les mêmes hypothèses que c et ψ, y compris les hypothèses sur la symétrie, mais la première est négative dans tout $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, et la seconde positive sur tout $\mathfrak{T}$; si $F^*(X, \Xi)$ est la fonction de Green correspon-

dant aux opérations $\mathfrak{F}v - \chi v$ et $\Theta v - \omega v$ et au domaine $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} + \mathfrak{D}'$, v est donc donné par l'équation

$$(1) \qquad v(X) = -\int\limits_{\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'}^{(m)} F^*(X, A)[f_1(A) - \chi(A)v(A)]\,dV_A$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'}^{(m-1)} F^*(X, B)[\varphi_1(B) - \omega(B)v(B)]\,dS_B,$$

dont on désire la ou les solutions qui prennent toujours des valeurs opposées en deux points symétriques. De toute solution $v(X)$ de cette équation de Fredholm, on peut en déduire une autre qui prend toujours des valeurs opposées en deux points symétriques, et qui par suite remplit toutes les conditions voulues, à savoir la solution $\frac{v(X) - v(X')}{2}$. D'ailleurs si l'on introduit la fonction de Green $F(X, \Xi) = F^*(X, \Xi) - F^*(X, \Xi')$, relative au domaine $\mathfrak{D}$ et aux opérations $\mathfrak{F}v - \chi v$ et $\Theta v - \omega v$ (§ 3), les fonctions v en question satisfont dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} + \mathfrak{T} + \mathfrak{C}$ à l'équation de Fredholm

$$(2) \qquad v(X) = -\int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A)[f_1(A) - \chi(A)v(A)]\,dV_A$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} F(X, B)[\varphi_1(B) - \omega(B)v(B)]\,dS_B;$$

réciproquement toute solution de cette équation (2) s'annule sur $\mathfrak{S}$ et, si on la prolonge dans $\mathfrak{D}'$ de façon qu'elle prenne en deux points symétriques toujours des valeurs opposées, elle satisfait à l'équation (1), et elle est par suite une solution de notre problème.

Il est donc démontré que le problème mixte considéré ici équivaut à la résolution d'une équation de Fredholm, à savoir l'équation (2).

En particulier, si le problème homogène correspondant n'admet que la solution zéro, le problème donné admet une solution et une seule. Il en est notamment ainsi dans le cas où c est négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}$, et ψ positif ou nul en tout point de $\mathfrak{T}$; le cas où c et ψ seraient identiquement nuls n'est pas à exclure (comme il arrive dans le second type de problèmes), car la condition de s'annuler sur $\mathfrak{S}$ entraîne qu'une solution constante est nulle.

Si le problème homogène admet des solutions non identiquement nulles, et si toutes celles-ci dérivent de p solutions linéairement indépendantes, le problème proposé n'est soluble que moyennant p conditions. Pour simplifier, soit $\varphi^* = 0$ la fonction donnée sur $\mathfrak{S}$. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des solutions linéairement indépendantes du *problème homogène adjoint*, c'est-à-dire de l'équation

$$(3)\quad v(X) - \int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(A, X)\chi(A)v(A)\,dV_A + \int\limits_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} F(B, X)\,\omega(B)\,v(B)\,dS_B = 0;$$

alors on vérifiera sans peine que les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème donné sont

$$\int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} v_n f\,dV - \int\limits_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} v_n \varphi\,dS = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'opération $\mathfrak{G}$ adjointe à $\mathfrak{F}$ existe et satisfait aux mêmes hypothèses que $\mathfrak{F}$, le problème adjoint est identique au problème mixte relatif à l'opération $\mathfrak{G}$, et à l'opération Z (chap. I, § 6) sur la partie $\mathfrak{T}$ de la frontière[1]).

Bonny-sur-Loire, le 15 décembre 1933.

---

[1]) La même méthode s'applique au cas où l'on remplace la condition de Neumann par une condition du troisième type décrit plus haut (chap. I, § 5), pourvu que, sur $\mathfrak{S}$, cette condition se réduise au type de Neumann. Pour le même domaine, on peut traiter d'une façon semblable le problème de Dirichlet. Enfin si l'on donne une condition de Neumann sur une des deux parties de la frontière, un changement d'inconnue permet encore d'introduire une symétrie (§ 1) *(ajouté sur l'épreuve)*.

Sur la variation de la tangente à une courbe fermée simple de Jordan.

Par

S. K. Zaremba (Wilno).

M. G. N. Watson [1]) a démontré que dans le plan la variation de l'angle formé avec un axe fixe par la tangente à une courbe fermée de Jordan sans points doubles est égale à 2π quand le point de contact décrit la courbe dans le sens direct, en supposant la continuité de la tangente. On peut aussi, comme l'indique M. Watson, considérer le cas où la courbe en question est composée d'un nombre fini d'arcs simples admettant chacun une tangente variant continuement avec la point de contact et tendant vers une limite bien déterminée lorsque le point de contact tend vers une extrémité de l'arc. Si l'on définit alors convenablement le saut que doit subir l'angle considéré aux points de raccordement de deux arcs successifs, le théorème s'applique aussi à ce cas [2]). M. B. von Kerékjártó [3]) a montré la possibilité de déduire ce théorème d'une proposition contenue dans son Cours de Topologie [4]).

À cause de l'importance de ce théorème, ayant des applications dans la théorie des fonctions et dans celle des équations différentielles, il vaut peut-être la peine de remarquer qu'on peut le rattacher d'une façon immédiate à un lemme employé ordinairement dans la démonstration du théorème de Jordan, en introduisant dans

---

[1]) A problem of analysis situs, Proceedings of the London Mathematical Society, 2e série, Vol. XV (1916), p. 227—242.

[2]) Pour le cas particulier d'un polygone, voir: Christian Wiener, Über Vielecke und Vielflache, Leipzig, 1864. L'auteur indique aussi la possibilité d'étendre le théorème au cas général.

[3]) On the Variation of the Tangent of a Simple Closed Curve, Proceedings of the London Mathematical Society, 2e série, Vol. XXIII (1925), p. XXXIX—XL.

[4]) Vorlesungen über Topologie, Berlin, 1923, p. 86—87.

ce but une notion comprenant comme cas particulier celle de l'ordre d'un point par rapport à une courbe fermée.

Soit C une courbe fermée simple de Jordan à tangente variant continuement avec le point de contact, orientée dans le sens direct. Au lieu de considérer un point fixe dont nous déterminerions l'ordre par rapport à la courbe C, nous introduirons une trajectoire continue fermée T, que nous supposerons rapportée au même paramètre que la courbe C. Cette trajectoire peut être absolument quelconque à condition seulement de ne pas traverser la courbe C. Soit P un point décrivant cette courbe et M le point de la trajectoire T correspondant à la même valeur du paramètre. La demie-droite MP varie d'une façon continue et l'angle qu'elle forme avec une direction fixe auguemente d'un multiple de 2π quand le point P décrit la courbe C. Nous appellerons ce multiple *ordre de la trajectoire T par rapport à la courbe C.*

Quand la trajectoire T varie d'une façon continue, toujours sans traverser la courbe C, son ordre ne peut varier que d'une façon continue, et comme c'est un entier, il est constant. Dans le cas où la trajectoire T se réduit à un seul point, l'ordre de celle-ci est égal à l'ordre de ce point par rapport à la courbe C. Mais il est facile de voir que toute trajectoire située à l'intérieur de la courbe C peut être réduite par continuité et sans toucher la courbe C à un point situé aussi à son intérieur, car l'intérieur de la courbe C est homéomorphe à l'intérieur d'un cercle. Or on démontre que l'ordre d'un point intérieur à la courbe C est égal à $+1$. Donc l'ordre d'une trajectoire T située à l'intérieur de la courbe C est aussi égal à $+1$.

Nous pouvons en particulier placer le point M sur le côté intérieur à C de la normale au point variable P à une distance constante et suffisamment petite de celui-ci pour que le point M reste toujours à l'intérieur de C. L'ordre de la trajectoire de M par rapport à C sera donc égal à $+1$. C'est-à-dire que quand le point P décrit cette courbe C, la variation de l'angle de la normale avec une direction fixe est égale à 2π, et comme la variation de l'angle formé par la tangente en P à la courbe C avec une direction fixe est la même, le théorème est démontré.

Un raisonnement analogue peut servir à démontrer que l'indice de Kronecker du vecteur normal à une surface simple fermée, dirigé vers l'extérieur de celle-ci est égal à l'unité.

Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green.

Par

F. Leja (Warszawa).

1. Je désignerai dans ce qui suit par E un ensemble fermé et borné des points du plan, par z une variable complexe et par

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \tag{1}$$

$n+1$ points différents quelconques appartenant à E. Les points (1) seront désignés aussi par une seule lettre ζ

$$\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}.$$

Les $n+1$ polynômes du degré n que voici

$$L_n^{(j)}(z, \zeta) = \frac{z-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0} \cdots \frac{z-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}} \cdot \frac{z-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}} \cdots \frac{z-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}, \tag{2}$$
$$\text{où} \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

seront dits *polynômes de Lagrange* appartenant aux points (1).

Soit z un point quelconque mais fixe du plan et

$$\max_{(j)} |L_n^{(j)}(z, \zeta)| \tag{3}$$

le plus grand des modules des polynômes (2). Lorsque les points (1) parcourent arbitrairement l'ensemble E la fonction (3) de ζ, où z est fixe, atteint [1]) dans E un minimum qui sera désigné comme il suit:

$$L_n(z) = L_n(z, E) = \min_{(\zeta)} \{\max_{(j)} |L_n^{(j)}(z, \zeta)|\}. \tag{4}$$

---

[1]) Car E est, par hypothèse, fermé et borné.

En faisant varier n on obtient une suite des fonctions nonnégatives en z

(5) $$L_1(z),\ L_2(z), \ldots, L_n(z), \ldots$$

intimément liées à l'ensemble E et définies dans le plan entier pourvu que E contienne une infinité de points différents, ce que nous supposerons dans la suite.

Formons maintenant le produit de toutes les distances, mutuelles entre les points (1) et posons

(6) $$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k|.$$

Cette fonction de ζ atteint dans E son maximum qui sera désigné par V_n. Il existe donc dans E $n+1$ points que je désignerai par

(7) $$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n \quad \text{ou par} \quad \eta = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$$

pour lesquels on a [2])

(8) $$V(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \max_{(J)} V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = V_n.$$

Formons les polynômes de Lagrange

(9) $$L_n^{(0)}(z, \eta),\ L_n^{(1)}(z, \eta), \ldots, L_n^{(n)}(z, \eta)$$

appartenant aux points (7) et considérons leurs dénominateurs, c'est-à-dire les produits

(10) $$\Delta_j(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = (\eta_j - \eta_0) \ldots, (\eta_j - \eta_{j-1})(\eta_j - \eta_{j-1}) \ldots (\eta_j - \eta_n),$$
$$\text{où} \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Celui des polynômes (9) dont le dénominateur est le plus petit en valeur absolue sera désigné par $L_n(z, \eta)$[3]). En changeant convenablement les indices des points (7), on peut toujours supposer qu'on ait

(11) $$|\Delta_0(\eta_0, \ldots, \eta_n)| \leqq |\Delta_j(\eta_0, \ldots, \eta_n)|, \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

on aura donc

(12) $$L_n(z, \eta) = L_n^{(0)}(z, \eta) = \frac{(z - \eta_1) \ldots (z - \eta_n)}{(\eta_0 - \eta_1) \ldots (\eta_0 - \eta_n)}.$$

---

[2]) Les points (7) dépendent, en général, de l'indice n, il serait donc plus naturel de les désigner par $\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}$. Je les désigne plus brièvement pour simplifier l'écriture.

[3]) S'il existe plusieurs dénominateurs dont la valeur absolue n'est pas plus grande que celle de tous les autres, $L_n(z, \eta)$ désignera un quelconque des polynômes correspondants.

En faisant varier n on obtient une seconde suite infinie

$$(13) \qquad L_1(z, \eta),\ L_2(z, \eta), \ldots, L_n(z, \eta), \ldots$$

dont les termes sont des polynômes intimement liés à l'ensemble E.

Le but de ce travail est l'étude des suites (5) et (13). Les termes de ces suites jouissent de certaines propriétés extrémales par rapport à l'ensemble E. Nous verrons que ces suites elles mêmes jouissent d'une propriété extrémale par rapport à l'ensemble de toutes les suites de polynômes, bornées dans l'ensemble E.

D'autre part, nous verrons que les suites (5) et (13) restent dans une intime liaison avec la fonction de Green appartenant au domaine (ou à un des domaines s'il y en a plusieurs) déterminé par l'ensemble E et situé à l'extérieur de E[4]).

Propositions auxiliaires.

2. Considérons le produit V_n défini par (8) et désignons par $M_n = M_n(E)$ le maximum dans l'ensemble E du module du polynôme n-ième de Tchebicheff $T_n(z)$ appartenant à E. En d'autres termes, posons

$$(14) \qquad M_n = \max_{(E)} |T_n(z)| \leqq \max_{(E)} |P_n(z)|$$

où $T_n(z)$ est celui des polynômes de la forme $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ pour lequel l'inégalité (14) est satisfaite quel que soit $P_n(z)$.

M. Fekete[5]) a démontré que les suites $\{V_n^{\frac{2}{n(n+1)}}\}$ et $\{M_n^{\frac{1}{n}}\}$ sont convergentes et tendent vers la même limite désignée par $d(E)$

$$(15) \qquad \lim V_n^{\frac{2}{n(n+1)}} = \lim M_n^{\frac{1}{n}} = d(E).$$

Cette limite est dite le *diamètre transfini* de E.

Posons

$$\Delta_j(z, \zeta) = (z - \zeta_0) \ldots (z - \zeta_{j-1})(z - \zeta_{j+1}) \ldots (z - \zeta_n)$$

et soit

$$(16) \qquad \Delta_n = \max_{(\zeta)} \{\min_{(j)} |\Delta_j(\zeta_j, \zeta)|\}$$

le maximum du plus petit des modules $|\Delta_0(\zeta_0, \zeta)|$, $|\Delta_1(\zeta_1, \zeta)|, \ldots,$

---

[4]) Les résultats de ce travail ont été insérés sans démonstrations détaillées dans les C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 198 (1934), p. 42 et 231.

[5]) Math. Zeitschr. t. 17 (1923), p. 228—49.

$\Delta_n(\zeta_n, \zeta)|$ lorsque les points $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ parcourent l'ensemble E. J'ai démontré ailleurs[6]) que la suite $\{\Delta_n^{\frac{1}{n}}\}$ est convergente et qu'on a

$$(17) \qquad \lim \Delta_n^{\frac{1}{n}} = d(E).$$

Observons que la constante $d(E)$ n'est jamais négative. Je dis que, *si l'ensemble E contient un arc (ou un continu) quelconque C, on a toujours*

$$d(E) > 0.$$

En effet, soient a et b deux points différents de C et

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$$

$n+1$ points du segment S joignant a avec b, les points x_j étant tels qu'on ait

$$(18) \qquad |x_{j+1} - x_j| = \frac{|b-a|}{n} \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

D'autre part, soit z_j le point (ou un des points) de l'arc C en lequel la perpendiculaire à S en x_j rencontre C. Posons

$$\Delta_j = |(z_j - z_0)\ldots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\ldots(z_j - z_n)|,$$
$$\delta_j = |(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)|$$

et observons que, d'après (18), on a $\delta_j = j!(n-j)!\left(\frac{|b-a|}{n}\right)^n$. D'autre part, comme d'après la formule de Stirling $k! > e^{-k} \cdot k^k$, on a

$$j!(n-j)! > e^{-n} \cdot j^j \cdot (n-j)^{n-j} \geqq e^{-n} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot$$

donc

$$\min_{(j)} \delta_j \geqq \left(\frac{n}{2e}\right)^n \cdot \left(\frac{|b-a|}{n}\right)^n = \left(\frac{|b-a|}{2e}\right)^n.$$

Mais, il est clair que $\min\limits_{(j)} \Delta_j \geqq \min\limits_{(j)} \delta_j$ et il suit de la formule (16) qu'on a $\Delta_n > \min\limits_{(j)} \Delta_j$; on a donc

$$\Delta_n \geqq \left(\frac{|b-a|}{2e}\right)^n$$

et, par suite,

$$d(E) \geqq \frac{|b-a|}{2e} > 0.$$

---

[6]) Bullet. Intern. de l'Acad. Polon., série A, 1933, p. 281—289.

3. Considérons la suite (5). Je vais établir ce que voici:

Lemme 1. *En chaque point z du plan les fonctions $L_n(z)$ satisfont aux inégalités*

(19) $$L_n(z) \geqq L_k(z) \cdot L_{n-k}(z) \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \ldots \quad \text{et} \quad k < n.$$

Démonstration. Soit z un point fixe du plan, n un nombre naturel fixe et

(20) $$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

$n+1$ points de E pour lesquels on ait

(21) $$L_n(z) = \max_{(j)} |L_n^{(j)}(z, x)|, \quad \text{où} \quad x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

Considérons $n-k$ points quelconques $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-k}}$ appartenant à la suite (20), formons le produit $V(z, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}})$ de tous les distances mutuelles entre les points $z, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-k}}$ et cherchons le maximum de ce produit lorsque, z étant fixe, les points $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}}$ parcourent la suite (20). Sans nuir à la généralité, on peut supposer que ce maximum soit atteint par $V(z, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, on a donc $V(z, x_{k+1}, \ldots, x_n) \geqq V(z, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-n}})$, quels que soient les indices $j_1, \ldots, j_{n-k} \leqq n$; en particulier, on a

(22) $$V(z, x_{k+1}, \ldots, x_n) \geqq V(z, x_i, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

quel que soit $i = 0, 1, \ldots, k$ et $l = k+1, \ldots, n$.

Désignons par $L_{n-k}^{(j)}(z, x_i, x_{k+1} \ldots x_n)$, où $j = i, k+1, \ldots, n$, les polynômes de Lagrange appartenant aux points $x_i, x_{k+1}, \ldots, x_n$. Je dis que l'inégalité (22) entraîne la suivante

(23) $$|L_{n-k}^{(l)}(z, x_l, x_{k+1} \ldots x_n)| \geqq |L_{n-k}^{(l)}(z, x_i. x_{k+1} \ldots x_n)|.$$

En effet, en se servant de la notation suivante

$$\Delta(z; a, b, \ldots r) = (z-a)(z-b)\ldots(z-r)$$

on peut donner au premier membre de l'inégalité (22) la forme

$$|\Delta(z; x_{k+1} \ldots x_n) \cdot \Delta(x_l; x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n)| \cdot V(x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n)$$

et au second membre de (22) la forme suivante

$$|\Delta(z; x_i, x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n) \cdot \Delta(x_i; x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n)| \cdot$$
$$\cdot V(x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n).$$

Il résulte donc de (22) qu'on a

$$\left|\frac{\Delta(z; x_{k+1} \ldots x_n)}{\Delta(x_i; x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n)}\right| \geqq \left|\frac{\Delta(z; x_i, x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n)}{\Delta(x_l; x_{k+1} \ldots x_{l-1}, x_{l+1} \ldots x_n)}\right|$$

et, si l'on divise les deux membres de cette inégalité par $|x_i - x_l| = |x_l - x_i|$, on obtient l'inégalité (23).

Formons les polynômes de Lagrange $L_k^{(j)}(z, x_0, \ldots, x_k)$, où $j = 0, 1, \ldots, k$, appartenant aux $k+1$ points premiers $x_0, x_1, \ldots, x_k$ de de la suite (20) et supposons que l'indice p, où $0 \leqq p \leqq k$, soit tel qu'on ait

$$|L_k^{(p)}(z, x_0, \ldots, x_k)| = \max_{(j)} |L_k^{(j)}(z, x_0, \ldots, x_k)|.$$

Il s'ensuit d'après la formule (4) qu'on a

$$|L_k^{(p)}(z, x_0 \ldots x_k)| \geqq L_k(z).$$

D'autre part, l'inégalité (23) étant vraie pour $i = 0, 1, \ldots, k$ et $l = k+1, \ldots, n$, elle est vraie pour $i = p$ et $l = k+1, \ldots, n$ d'où il résulte qu'on a

$$|L_{n-k}^{(p)}(z, x_p, x_{k+1} \ldots x_n)| = \max_{(j)} |L_{n-k}^{(j)}(z, x_p\, x_{k+1} \ldots x_n)| \geqq L_{n-k}(z).$$

Mais, il résulte de (21) qu'on a

$$L_n(z) \geqq |L_n^{(p)}(z, x)| = |L_k^{p)}(z, x_0, \ldots, x_k) \cdot L_{n-k}^{(p)}(z, x_p, x_{k+1}, \ldots, x_n)|$$

et les trois dernières inégalités prouvent que l'inégalité (19) est satisfaite.

4. Soit D un domaine (ou un ensemble) borné quelconque et soit

$r(D, E) =$ la distance entre D et E

$R(D, E) =$ le rayon du plus petit cercle contenant $D + E$.

Il est clair que, si D et la frontière de D n'ont aucun point commun avec E, on a $r(D, E) > 0$.

Lemme 2. *Les termes de la suite (5) satisfont dans chaque domaine borné D aux inégalités*

$$\frac{r^n}{\Delta_n} \leqq L_n(z) \leqq \frac{R^n}{\Delta_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

où Δ_n est défini par (16), $r = r(D, E)$ et $R = R(D, E)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = x$, $n+1$ points de E pour lesquels on ait

$$L_n(z) = \max_{(j)} |L_n^{(j)}(z, x)| = \max_{(j)} \left|\frac{\Delta_j(z, x)}{\Delta_j(x_j, x)}\right|,$$

où $\Delta_j(z, x) = (z - x_0) \ldots (z - x_{j-1})(z - x_{j+1}) \ldots (z - x_n)$. D'après (16) on a

$$\Delta_n \geqq \min_{(j)} |\Delta_j(x_j\, x)|$$

donc, si l'on pose $\min\limits_{(j)} |\Delta_j(x_j, x)| = |\Delta_k(x_k, x)|$, on obtient pour tous les z appartenant à D

$$L_n(z) \geqq \left|\frac{\Delta_k(z, x)}{\Delta_k(x_k, x)}\right| \geqq \frac{r^n}{\Delta_n}$$

car, étant $|z - x_j| \geqq r$ quel que soit j, on a $|\Delta_k(z, x)| \geqq r^n$.

D'autre part, soient $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\} = y$, $n + 1$ points de E pour lesquels on ait

$$\Delta_n = \min_{(j)} |\Delta_j(y_j, y)|.$$

Comme, d'après la formule (4),

$$L_n(z) \leqq \max_{(j)} |L_n^{(j)}(z, y)| = \max_{(j)} \left|\frac{\Delta_j(z, y)}{\Delta_j(y_j, y)}\right|,$$

on en déduit

$$L_n(z) \leqq \frac{\max\limits_{(j)} |\Delta_j(z, y)|}{\Delta_n} \leqq \frac{R^n}{\Delta_n},$$

car, quel que soit j, on a $|\Delta_j(z, y)| = |(z - y) \ldots (z - y_{j-1})(z - y_{j+1}) \ldots \ldots (z - y_n)| \leqq R^n$.

Lemme 3. *Si une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, où $a_n > 0$, satisfait aux inégalités*

(25) $\qquad a_n \geqq a_k \cdot a_{n-k}, \quad$ où $\quad n = 2, 3, \ldots \quad$ et $\quad k < n,$

la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ tend vers une limite finie ou infinie [7]).

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$\alpha = \lim\inf \sqrt[n]{a_n} \leqq \lim\sup \sqrt[n]{a_n} = \beta$$

et supposons d'abord que β soit fini. Les cas $\beta = 0$ n'exigeant pas de démonstration, supposons qu'on ait $\beta > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque, mais tel qu'on ait $\beta - \varepsilon > 0$. Il existe à ce ε un indice m tel qu'on ait

$$\sqrt[m]{a_m} > \beta - \varepsilon > 0.$$

---

[7]) Observons que ce lemme peut être faux dans le cas $a_n \geqq 0$ comme le prouve l'exemple suivant

$$a_{2\nu-1} = 0, \ a_{2\nu} = 1 \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Cette suite remplit les conditions (25) mais la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ ne tend vers aucune limite.

Soit n un indice quelconque et k et r deux nombres naturels pour lesquels

$$n = km + r, \quad 0 \leqq r < m.$$

D'après (25) on a

$$a_n \geqq a_{km} \cdot a_r \geqq (a_m)^k \cdot a_r,$$

où l'on doit poser $a_r = 1$, si $r = 0$, donc

$$\sqrt[n]{a_n} \geqq (a_m)^{\frac{k}{n}} \cdot a_r^{\frac{1}{n}} > (\beta - \varepsilon)^{\frac{km}{km+r}} \cdot a_r^{\frac{1}{n}}.$$

Or, cette inégalité entraîne la suivante

$$\alpha \geqq \beta - \varepsilon$$

car, si n tend vers l'infini, k tend vers l'infini et $a_r^{\frac{1}{n}}$ tend vers l'unité. Puisque $\alpha \leqq \beta$ et ε est arbitrairement petit, on en déduit $\alpha = \beta$, donc la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ converge.

Dans le cas $\beta = +\infty$ il suffit de remplacer dans ce qui précède $\beta - \varepsilon$ par un nombre quelconque A pour pouver qu'on a $\alpha \geqq A$ d'où il résulte que la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ tend vers l'infini.

5. Considérons maintenant les polynômes de Lagrange (9) appartenant aux points (7) et formons une suite infinie quelconque

$$L_1^{(j_1)}(z, \eta), L_2^{(j_2)}(z, \eta), \ldots, L_n^{(j_n)}(z, \eta), \ldots \quad \text{où} \quad 0 \leqq j_n \leqq n.$$

Lemme 4. *1° Quel que soit n et $j = 0, 1, \ldots, n$, les polynômes (9) satisfont aux inégalités*

(26) $$|L_n^{(j)}(z, \eta)| \leqq 1 \text{ pour tous les } z \text{ appartenant à } E,$$

2° A tout point z_0 d'un continu C appartenant à E et à tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V = V(z_0, \varepsilon, C)$ du point z_0 tel que, en chaque point z de V, on a

(27) $$\limsup \sqrt[n]{|L_n^{(j_n)}(z, \eta)|} \leqq 1 + \varepsilon \quad \text{quel que soit } \{j_n\}.$$

En effet, si l'inégalité (26) n'avait pas lieu pour $j = k$ et $z = \eta'_k$, on aurait $|L_n^{(k)}(\eta'_k, \eta)|) > 1$. En d'autres termes, on aurait d'après la notation (2)

$$|(\eta'_k - \eta_0) \ldots (\eta'_k - \eta_{k-1})(\eta'_k - \eta_{k+1}) \ldots (\eta'_k - \eta_n)| >$$
$$> |(\eta_k - \eta_0) \ldots (\eta_k - \eta_{k-1})(\eta_k - \eta_{k+1}) \ldots (\eta_k - \eta_n)|.$$

En multipliant cette inégalité par le produit $V(\eta_0 \dots \eta_{k+1}, \eta_{k+1} \dots \eta_n)$ défini par la formule (6) on obtiendrait

$$V(\eta_0 \dots \eta_{k-1}, \eta'_k, \eta_{k+1} \dots \eta_n) > V(\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n)$$

ce qui reste en contradiction avec l'hypothèse (8). Les inégalités (26) sont donc satisfaites.

La partie 2⁰ du lemme est une conséquence des inégalités (26) et de la proposition générale suivante démontrée ailleurs [8]):

Si une suite de polynômes $\{P_n(z)\}$, où $P_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \dots + a_n^{(n)} \cdot z^n$, est uniformément bornée sur un continu C aboutissant à un point z_0 il existe à tout $\varepsilon > 0$ un voisinage $V(z_0, \varepsilon, C)$ de z_0, ne dépendant pas des coëfficients des polynômes $P_n(z)$, en lequel on a $\limsup \sqrt[n]{|P_n(z)|} < 1 + \varepsilon$.

Fonctions limites et leurs propriétés.

6. Considérons la suite (5) et formons la nouvelle suite suivante:

$$\sqrt[1]{L_1(z)},\ \sqrt[2]{L_2(z)}, \dots, \sqrt[n]{L_n(z)}, \dots \tag{28}$$

Théorème 1. *La suite* (28) *tend dans le plan entier vers une limite*

$$\sqrt[n]{L_n(z)} \to \lambda(z) = \lambda(z, E). \tag{29}$$

La fonction limite $\lambda(z)$ est partout finie, si $d(E) > 0$, et partout en dehors de E infinie, si $d(E) = 0$. Quel que soit $d(E)$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= 1 \quad \textit{dans l'ensemble } E, \\ \lambda(z) &\geqq 1 \quad \textit{partout.} \end{aligned} \tag{30}$$

Démonstration. Les polynômes de Lagrange (2) satisfont comme on sait, à l'identité

$$L_n^{(0)}(z, \zeta) + L_n^{(1)}(z, \zeta) + \dots + L_n^{(n)}(z, \zeta) \equiv 1,$$

---

[8]) Math. Ann. t. 108 (1933), p. 517—524. Voir le théorème II, p. 520. Ce théorème a été démontré dans l'hypothèse (moins restrictive) que la suite $\{P_n(z)\}$ est bornée presque partout sur C et dans ce cas le voisinage $V(z_0, \varepsilon, C)$ peut dépendre de la suite $\{P_n(z)\}$. Mais, si cette suite est uniformément bornée sur C, il résulte évidamment de cette démonstration que $V(z_0, \varepsilon, C)$ ne dépend pas des polynômes $P_n(z)$.

qui a lieu quel que soit n et $\zeta=\{\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}$. Il s'ensuit l'inégalité

$$\max_{(j)}|L_n^{(j)}(z,\zeta)|\geqq\frac{1}{n+1}$$

et par suite, on a d'après (21)

$$L_n(z)\geqq\frac{1}{n+1}. \tag{31}$$

Les termes de la suite $\{L_n(z)\}$ sont donc positifs quel que soit z et, puisqu'ils satisfont aux inégalités (19), la limite (29) existe, quel que soit z, en vertu du lemme 3.

Supposons que le diamètre $d(E)$ soit positif et soit D un domaine borné du plan. D'après (24) on a $L_n(z)\leqq\frac{R^n}{\varDelta_n}$ donc d'après (17) on a $\lambda(z)\leqq\frac{R}{d(E)}$ et, par suite, $\lambda(z)$ est fini dans D. Au contraire, si $d(E)=0$, $\lambda(z)$ n'est pas fini en dehors de E car, d'après (24), on a

$$\sqrt[n]{L_n(z)}\geqq\frac{r}{\sqrt[n]{\varDelta_n}}$$

où $r>0$ en dehors de E et $\sqrt[n]{\varDelta_n}\to d(E)=0$.

La seconde des propriétés (30) résulte de l'inégalité (31). Pour établir la première d'elles considérons un point z_0 de E et choisissons dans E, $n+1$ points $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ dont $\zeta_0=z_0$. D'après (2) on aura

$$L_n^{(0)}(z_0,\zeta)=1,\quad L_n^{(j)}(z_0,\zeta)=0\quad\text{pour}\quad j>0$$

et, par suite, d'après (4) on aura $L_n(z_0)\leqq 1$ donc, comme d'après (31) $L_n(z_0)\geqq\frac{1}{n+1}$, on obtient $\lambda(z_0)=1$. Le théorème est donc démontré.

7. Je supposerai dans ce qui suivra que le diamètre transfini de l'ensemble E est positif

$$d(E)>0.$$

Considérons les polynômes (12) et formons la suite suivante

$$\log|L_1(z,\eta)|,\ \tfrac{1}{2}\log|L_2(z,\eta)|,\ldots,\ \frac{1}{n}\log|L_n(z,\eta)|,\ldots$$

dont les termes sont définis partout à l'extérieur de E.

Théorème 2. *La suite* (32) *converge partout à l'extérieur de* E *vers une limite finie*

$$\frac{1}{n}\log|L_n(z,\eta)| \to G(z) = G(z, E). \tag{33}$$

La fonction limite $G(z)$ *est harmonique à l'extérieur de* E.

D é m o n s t r a t i o n. Soit z un point fixe n'appartenant pas à E et j_z celui des indices $j = 0, 1, \ldots, n$ pour lequel $|L_n^{(j_z)}(z,\eta)|$ est maximum parmi les modules des polynômes (9)

$$L_n^{(0)}(z,\eta), L_n^{(1)}(z,\eta), \ldots, L_n^{(n)}(z,\eta).$$

D'après la formule (4) on a

$$L_n(z) \leqq |L_n^{(j_z)}(z,\eta)|.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (11) on a, quel que soit j,

$$\left|\frac{(z-\eta_0)\ldots(z-\eta_{j-1})(z-\eta_{j+1})\ldots(z-\eta_n)}{(\eta_j-\eta_0)\ldots(\eta_j-\eta_{j-1})(\eta_j-\eta_{j+1})\ldots(\eta_j-\eta_n)}\right| \cdot \left|\frac{z-\eta_j}{z-\eta_0}\right| \leqq$$
$$\leqq \left|\frac{(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)}{(\eta_0-\eta_1)\ldots(\eta_0-\eta_n)}\right|$$

ou, en d'autres termes,

$$|L_n^{(j)}(z,\eta)| \cdot \left|\frac{z-\eta_j}{z-\eta_0}\right| \leqq |L_n^{(0)}(z,\eta)| = |L_n(z,\eta)|$$

d'où l'on obtient, en vertu de l'inégalité précédente

$$L_n(z) \cdot \left|\frac{z-\eta_{j_z}}{z-\eta_0}\right| \leqq |L_n(z,\eta)|\,. \tag{34}$$

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points de E pour lesquels $L_n(z) = \max\limits_{(j)} |L_n^{(j)}(z,x)|$. La fonction $L_n(z,\eta)$ étant, d'après (12), un polynôme du degré n en z on a, d'après la formule d'interpolation de Lagrange,

$$L_n(z,\eta) = \sum_{j=0}^{n} L_n(x_j,\eta) \cdot L_n^{(j)}(z,x)$$

et, puisque $|L_n(x_j,\eta)| = |L_n^{(0)}(x_j,\eta) \leqq 1$, ce qui résulte du lemme 4, on en déduit

$$|L_n(z,\eta)| \leqq (n+1)\max_{(j)}|L_n^{(j)}(z,x)| = (n+1)\,L_n(z).$$

En réunissant cette inégalité avec (34) on obtient, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$,

(35) $$L_n(z) \cdot \left|\frac{z-\eta_z}{z-\eta_0}\right| \leqq |L_n(z,\eta) \leqq (n+1) \cdot L_n(z).$$

Or, si z n'appartient pas à E, le module $\left|\frac{z-\eta_z}{z-\eta_0}\right|$ surpasse un nombre positif et, d'après (29), la suite $\frac{1}{n}\log L_n(z)$ tend vers la limite $\log \lambda(z)$; il résulte donc de (35) que la limite (33) existe et qu'on a

(36) $$G(z) = \log \lambda(z).$$

Soit D un domaine fermé et borné extérieur à E. Lorsque z appartient à D on a d'après (24) et (35)

$$\frac{r^n}{\Delta_n} \cdot \frac{r}{R} \leqq |L_n(z,\eta)| \leqq (n+1)\frac{R^n}{\Delta_n}, \quad \text{où} \quad r > 0,$$

d'où il suit que la suite $\left\{\frac{1}{n}\log|L_n(z,\eta)|\right\}$ est uniformément bornée dans D. Mais les termes de cette suite sont harmoniques dans D, car les fonctions $L_n(z,\eta)$ sont des polynômes en z, la fonction limite $G(z)$ est donc harmonique dans D et, par suite, harmonique partout à l'extérieur de E. c. q. f. d.

8. On sait que l'extérieur d'un ensemble plan fermé est une somme finie ou dénombrable de domaines. Soient

$$D_0, D_1, \ldots$$

les domaines connexes, n'ayant pas des points communs, dont la somme constitue l'extérieur de E et soit D_0 celui de ces domaines qui contient le point à l'infini [9]) et F la frontière de D_0.

Il est clair que F fait partie de E. Nous supposerons que chaque point de F est un point d'un continu appartenant entièrement à F.

Théorème 3. *La fonction limite $G(z) = G(z, E)$ est la fonction de Green du domaine D_0. Elle remplit les conditions suivantes:*

(37) $$G(z) \to 0 \quad \text{si } z \text{ tend vers la frontière } F,$$

(38) $$\log|z| - G(z) \to \log d(E), \quad \text{si} \quad |z| \to \infty.$$

---

[9]) Un tel domaine existe car l'ensemble E est borné.

Démonstration. On sait déjà d'après (30) que $\lambda(z)=1$ sur F et que $G(z)=\log\lambda(z)\geqq 0$ dans D_0. Pour établir (37) il suffft donc de prouver que la fonction $\lambda(z)$ est continue aux points de F.

Soit z_0 un point de F et C un continu appartenant à F et contenant z_0. D'autre part, soit $\varepsilon>0$ un nombre quelconque, $V=$ $=V(z_0,\varepsilon,C)$ le voisinage de z_0 dans lequel la condition (27) est remplie et z un point quelconque de V. D'après (4) on a

$$L_n(z)\leqq\max_{(j)}|L_n^{(j)}(z,\eta)|,\quad \text{où}\quad \eta=\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_n\}$$

d'où il résulte en vertu de (27) qu'on a dans $V(z_0,\varepsilon,C)$

$$\lambda(z)=\lim\sqrt[n]{L_n(z)}\leqq 1+\varepsilon.$$

La fonction $\lambda(z)$ est donc continue ou point z_0 et, par suite, la formule (37) est établie.

Pour établir la formule (38) observons que, en vertu de (11) et (16), on a

$$|\varDelta_0(\eta_0\ldots\eta_n)|=\min_{(j)}|\varDelta_j(\eta_0\ldots\eta_n)|\leqq\varDelta_n.$$

D'autre part, on a d'après (26)

$$|L_n^{(0)}(z,\eta)|=\left|\frac{(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)}{(\eta_0-\eta_1)\ldots(\eta_0-\eta_n)}\right|\leqq 1,$$

quel que soit z appartenant à E, donc

$$|\varDelta_0(\eta_0\ldots\eta_n)|=|(\eta_0-\eta_1)\ldots(\eta_0-\eta_n)|=\max_{(E)}|(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)|$$

d'où il résulte d'après (14) et d'après ce qui précède que

$$M_n\leqq|\varDelta_0(\eta_0\ldots\eta_n)|\leqq\varDelta_n.$$

On aura donc

$$|\varDelta_0(\eta_0\ldots\eta_n)|^{\frac{1}{n}}\to d(E) \tag{39}$$

ce qui est évident d'après (15) et (17).

Observons maintenant que la fonction $G(z)$ est, d'après (12) et (33), la limite pour n tendant vers l'infini de la fonction suivante:

$$\frac{1}{n}\log\left|\frac{(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)}{(\eta_0-\eta_1)\ldots(\eta_0-\eta_n)}\right|=$$

$$=\log|z|+\frac{1}{n}\log\left|\left(1-\frac{\eta_1}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{\eta_n}{z}\right)\right|-\log|\varDelta_0(\eta_0\ldots\eta_n)|^{\frac{1}{n}},$$

on a donc d'après (39)

$$\log|z| - G(z) - \log d(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left|\left(1-\frac{\eta_1}{z}\right)\dots\left(1-\frac{\eta_n}{z}\right)\right|.$$

Or, si $|z|$ est suffisamment grand, le second membre de cette équation est arbitrairement voisin de zéro et, par suite, le théorème et démontré.

9. Soit D un domaine fermé et borné quelconque et

(40) $\quad P_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\cdot z + \dots + a_n^{(n)}\cdot z^n, \quad$ où $\quad n = 0, 1, \dots,$

une suite quelconque de polynômes. Considérons la fonction limite $\lambda(z) = \lambda(z, E)$ de la suite (29) et posons

(41) $$\varrho_D = \frac{1}{\lambda_D}, \quad \text{où} \quad \lambda_D = \max_{(D)} \lambda(z, E)$$

Théorème 4. *Si la suite* (40) *est uniformément bornée dans* E, *1° la nouvelle suite*

(42) $$\{P_n(z)\cdot\varrho^n\}, \quad \textit{où} \quad \varrho > 0,$$

converge uniformément vers zéro dans D *pour chaque* $\varrho < \varrho_D$, *2° il existe une suite* (40) *telle que la suite* (42) *ne soit uniformément bornée pour aucun* $\varrho > \varrho_D$.

Démonstration. 1° Soit $M > 0$ un nombre tel qu'on ait

$$|P_n(z)| < M \quad \text{dans } E \text{ pour } \quad n = 0, 1, \dots,$$

z un point quelconque et $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ points de E pour lesquels on ait

$$L_n(z) = \max_{(j)} |L_n^{(j)}(z, x)|.$$

D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a

$$|P_n(z)| = \left|\sum_{j=0}^{n} P_n(x_j)\cdot L_n^{(j)}(z, x)\right| \leqq (n+1)\,M\cdot L_n(z)$$

d'où il résulte, d'après (29), que

$$\limsup \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqq \lambda(z).$$

Soit ϱ_0 un nombre positif $< \varrho_D$ et ϱ_1 un nombre tel qu'on ait $\varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_D$. D'après (41) et (43) on a dans D

$$\limsup \sqrt[n]{|P_n(z)|\cdot\varrho_1^n} \leqq \varrho_1 \cdot \max_{(D)} \lambda(z) < 1$$

d'où il suit que la suite $\{P_n(z)\cdot\varrho_1^n\}$ est bornée en chaque point de D et, par suite[10]), la suite $\{P_n(z)\,\varrho_2^n\}$, où $\varrho_0<\varrho_2<\varrho_1$, est uniformément bornée dans D. Il en résulte immédiatement que la suite

$$P_n(z)\cdot\varrho_0^n=P_n(z)\,\varrho_2^n\cdot\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_2}\right)^n,\quad \text{où}\quad n=0,1,\ldots$$

tend uniformément vers zéro dans D.

2° Considérons la suite des polynômes (12) et soit $\varrho_0>\varrho_D$. D'après (33) et (36) on a

$$\sqrt[n]{|L_n(z,\eta)|\cdot\varrho_0^n}\to\lambda(z)\cdot\varrho_0$$

et d'après (41) on a $\max\limits_{(D)}\lambda(z)\cdot\varrho_0>1$, donc la suite

$$\{L_n(z,\eta)\cdot\varrho_0^n\}$$

n'est pas uniformément bornée dans D, c. q. f. d.

---

[10]) Math. Ann. t. 108 (1933), p. 517—524 (v. le Théorème 1, p. 517).

Eine Verallgemeinerung des Montel'schen Satzes über das Maximal- und Minimalintegral auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von

T. Ważewski (Kraków).

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

gegeben, wo f eine im Vertikalstreifen

(1) $$0 \leqslant x \leqslant b; \ y \text{ beliebig}$$

stetige Funktion ist. Wir setzen voraus, dass die von dem Punkt $A(0, 0)$ ausgehenden Minimal- und Maximalintegrale beide bis auf die Gerade $x = b$ fortgesetzt werden können. Es bezeichne $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ das oben erwähnte Minimal- bzw. Maximalintegral. Ferner seien auf der y-Achse zwei Punktfolgen A_ν, B_ν gegeben, von folgenden Eigenschaften: 1°) A_ν liegen unterhalb, B_ν oberhalb des Punktes A, 2°) $A_\nu \to A$. $B_\nu \to B$.

Bezeichnen wir nun mit $\varphi_\nu(x)$ bzw. $\psi_\nu(x)$ das durch den Punkt A_ν bzw. B_ν gehende Minimal- bzw. Maximalintegral, so besagt der bekannnte Montel'sche Satz[1]), dass $\varphi_\nu \to \varphi$, $\psi_\nu \to \varphi$ (für $0 \leqslant x \leqslant a$).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist den genannten Satz auf Systeme von Differentialgleichungen mit stetigen rechten Seiten zu verallgemeinern.

---

[1]) Bulletin des Sciences Mathématiques (2), 50, (1926), 207.

Die folgende Formulierung des Moutel'schen Satzes legt es nahe die gesuchte Verallgemeinerung auf natürlichem Wege zu finden.

Auf der y-Achse sei eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge S gegeben. Die Gesamtmenge aller Integralkurven, die aus den Punkten der Menge S ausgehen, wollen wir mit $H(S)$ bezeichnen. Als äußeren Bereich von $H(S)$ [der mit $EH(S)$ bezeichnet wird] erklären wir ferner die Menge aller derjenigen Punkte, die mit dem unendlich fernen Punkt ∞ mittels eines stetigen, im Bereich (2) liegenden und $H(S)$ nicht treffenden Bogen verbindet werden können. Die Grenze[1]) des Bereiches $EH(S)$ soll äußere Grenze der Menge $H(S)$ heißen und mit $FEH(S)$ bezeichnet werden.

$FEH(A)$ besteht ersichtlich aus den beiden Integralkurven $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$. Analog besteht $FEH(S_\nu)$ aus den beiden Integralkurven $y = \varphi_\nu(x)$, $y = \psi_\nu(x)$ wenn $S_\nu = A_\nu + B_\nu$ gesetzt wird. Mit Hilfe dieser Bezeichnungen können wir den Montel'schen Satz folgendermaßen aussprechen

$$FEH(S_\nu) \rightarrow FEH(A)\,^{2)} \tag{2}$$

Die Mengen S_ν trennen ersichtlich, auf der y Achse, die Punkte A und ∞.

Im Falle, wenn ein System von n Differentialgleichungen vorliegt, ersetzen wir S_ν durch geschlossene, gegen A konvergierende Mengen, die auf der Hyperebene $x = 0$ den Punkt A von dem Punkte ∞ trennen. Die Beziehung (2) behält dann ihre Gültitgeit (Satz 2, § 3) (Im Falle $n = 2$ können als S_ν z. B. geschlossene Jordan'sche Kurven genommen werden, die den Punkt A im Inneren enthalten).

Gelegentlich gewinnen wir den Satz 1 (§ 3) aus dem folgt, dass $EH(A)$ alle zu $H(A)$ nichtgehörenden Punkte der Schicht $0 \leqslant x \leqslant b$ enthält. Der Hilfsatz 2 (§ 3) gibt einen Bereich an, aus welchem keine von A ausgehende Integralkurve austreten kann. Am Schluß wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, dass durch den Punkt A genau eine Integralkurve hindurchgeht (Satz 3).

[1]) Aus dieser Grenze werfen wir im Folgenden die Punkte, die nicht $H(S)$ angehören fort. Dies geschieht automatisch, wenn man den Begriff der Grenze relativiert (Vgl. § 1).

[2]) Die Konvergenz von Punktmengen wird im Sinne von Hausdorff gemeint (Vgl. § 1, 8).

Wir behandeln nur den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall kann in ganz analoger Weise erledigt werden.

Im § 1 werden einige behannte Begriffe und Hilfssätze der Mengentheorie vorangeschickt.

§ 1.

Im Folgenden werden nur Punktmengen betrachtet, die aus Punkten $(x, y_1, \ldots, y_n)$ der Schicht C:

(3) $$-\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty, \; -\infty < y_\nu < +\infty$$

bestehen. Wir bedienen uns in dieser Arbeit der mengentheoretischen Begriffe und Eigenschaften die einen *in Bezug auf die Schicht C relativen Charakter* besitzen. Wir finden es für zweckmäßig diese Begriffe und Eigenschaften zusammenzustellen.

1. Unter der Umgebung des Punktes A für ein gegebenes $r > 0$ oder kürzer r-Umgebung des Punktes A, wird die Menge derjenigen Punkte der *Schicht C* verstanden, deren Abstand von A kleiner als r ist. Von diesem Begriffe ausgehend, erklären wir wie üblich die Begriffe der inneren, äußeren, Grenz- und Haüfungspunkte, sowie die der offenen und geschlossenen Mengen, schließlich die der Begrenzung von Mengen. Als Beispiel betrachten wir den Zylinder

(4) $$c \leqslant x \leqslant b, \; \Sigma y_\nu^2 \leqslant r^2 \quad (r > 0).$$

Die Punkte, für welche $\Sigma y_\nu^2 < r^2$, $a \leqslant x \leqslant b$ gilt, (unter ihnen auch diejenige, für welche $x = a$, oder $x = b$) sind im oben genannten Sinne die inneren Punkte unseres Zylinders. Die Begrenzung des Zylinders enthält nur diejenigen Punkte, für die gleichzeitig beide Beziehungen $a \leqslant x \leqslant b$, $\Sigma y_\nu^2 = r^2$ gelten.

Nun geben wir einige Bezeichnungen und Sätze an, auf welche wir uns im folgenden stützen werden.

1. $F(B) =$ die Menge aller Grenzpunkte der Menge B.
2. $\bar{B} = B + F(B)$.
3. Wenn B abgeschlossen ist, so gehört $F(B)$ zu B selbst, was folgendermaßen geschrieben wird: $F(B) \subseteq B$.
4. Ist keine der Mengen B, $C - B$ leer, so bestehen die Beziehungen $F(B) = F(C - B) = \bar{B} \cdot \overline{C - B}$.
5. Jeder stetige Bogen, der irgendeinen Punkt der Menge B mit irgendeinem Punkte, der nicht zu B gehört, verbindet, hat gemeinsame Punkte mit der Menge $F(B)$.

6. Unter $E(B)$ verstehen wir die Menge aller derjenigen Punkte, die sich mit ∞ mittels eines stetigen Bogen verbinden lassen, so dass der Bogen mit B keine gemeinsamen Punkte besitzt. Unter der äußeren Begrenzung der Menge B, wird die Menge $F(E(B))$ verstanden. Ist B abgeschlossen, so ist $F(E(B))$ in B enthalten.

7. Wir sagen, daß eine (ebene) Menge B den Punkt A von Punkte ∞ trennt. wenn jeder, in der Ebene liegende stetige Bogen, der den Punkt A mit ∞ verbindent, mit B gemeinsame Punkte besitzt.

8. Unter der Entfernung $\varrho(P, B)$ des Punktes P, von der Menge B verstehen wir die untere genaue Grenze der Entfernungen des Punktes P von allen Punkten der Menge B.

Sind zwei Mengen B und D gegeben so verstehen wir unter ihrer Hausdorffschen Entfernung [1]) $\varrho^*(B, D)$ die obere genaue Grenze der Zahlen $\varrho(Q, D)$ und $\varrho(P, B)$, wobei P die Menge D, Q dagegen die Menge B durchläuft. Wir sagen dann und dann, dass eine Folge von Mengen B_ν im Sinne von Hausdorff gegen eine Menge B konvergiert, wenn $\varrho^*(B_\nu, B)$ gegen Null strebt.

9. Im Falle, wenn B abgeschlossen und beschränkt ist, beruht offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass $\varrho^*(B_\nu, B) \to 0$ auf dem Bestehen der folgenden zwei Eigenschaften [2])

α) Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine wachsende Indexenfolge, gehört P_{α_ν} zu B_{α_ν} und konvergiert P_{α_ν} gegen P, so gehört P zu B.

β) Ist P ein beliebige Umgebung des Punktes P, so gibt es einen Index ν_0, sodass für $\nu \geqslant \nu_0$ die Umgebung Ω mindestens einen Punkt der Menge B_ν enthält.

§ 2.

Voraussetzungen V. Es sei das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \tag{5}$$

gegeben, und die Funktionen f und g seien im Zylinder

$$\left.\begin{array}{c} (y-c)^2 + (z-d)^2 \leqslant R^2 \\ a \leqslant x \leqslant b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{wo} \quad R > 0 \quad \text{und} \\ -\infty < a < b < +\infty \end{array} \tag{6}$$

---

[1]) Vgl. Hausdorff, Mengenlehre (1927) S. 146.

[2]) Vgl. z. B. T. Ważewski, Sur un continu singulier, Fund. Math. Band IV, S. 225 (Remarque).

stetig. Wir setzen voraus, dass jedes durch dem Punkt $A(a, c, d)$ gehende Integral bis zu der Ebene $x = b$ gelangt und dass es gänzlich im Zylinder

$$(7) \qquad (y - c)^2 + (z - d)^2 < R^2, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

liegt.

Das System besitzt dann folgende Eigenschaften:

1. Es gibt eine Zahl r $(0 < r < R)$ von der Eigenschaft, dass jedes Integral, das von der Kreisscheibe

$$(8) \qquad (y - c)^2 + (z - d)^2 \leqslant r^2, \quad x = a$$

ausgeht, die Ebene $x = b$ erreicht und im Zylinder (7) verlaüft [1].

2. S sei eine auf der Kreisscheibe (8) gelegene Punktmenge. Die Menge der Punkte, die auf denjenigen Integralkurven liegen, welche die Menge S treffen und im Intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ definiert sind, nennen wir die *Röhre* $H(S)$. Diese Röhre $H(S)$ liegt gänzlich im Zylinder (7) und ist abgeschlossen, falls S abgeschlossen ist. Reduziert sich S zu einem einzigen Punkt P, so nennen wir $H(P)$ Integraltrichter. Bemerken wir, dass die Punkte der Zylinderfläche

$$(9) \qquad (x - c)^2 + (y - d)^2 = R^2, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

sowie die von A verschiedenen Punkte der Ebene $x = a$, zu der Menge $EH(A)$ gehören (Vlg. § 1, 6).

3. S sei eine Menge, die in der Kreisscheibe (8) enthalten ist. Setzen wir voraus, dass ein. vom Punkte P nach links ausgehendes Integral, die Röhre $H(S)$ trifft. Der Punkt P gehört dann der Röhre $H(S)$ an (Vgl. die Definition von $H(S)$).

4. Es existieren Funktionen $\bar{f}$ und $\bar{g}$, die in der ganzen Schicht stetig und beschränkt sind und im Zylinder (6) mit den Funktionen f und g übereinstimmen [2]), die also die Eigenschaft haben, dass jedes Integral des Systems

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} = \bar{f}(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \bar{g}(x, y, z)$$

bis an die Ebenen $x = a$ und $x = b$ herankommt. Die im Zylinder (6) oder (7) gelegenen Integrale des Systems (10) erfüllen gleichzeitig das System (5).

---

[1]) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (1930), S. 135, Satz 1 und 2.

[2]) Vgl § 2, 1.

§ 3.

Behalten wir die Voraussetzungen V des vorigen Paragraphen.

Satz 1. Die Menge derjenigen Punkte der Schicht C, die nicht zu dem Integraltrichter $H(A)$ gehören, bildet ein zusammenhängendes Gebiet[1]. Mit anderen Worten

$$C - H(A) = EH(A). \tag{11}$$

Beweis. Wir haben ersichtlich $EH(A) \subset C - H(A)$. Um das umgekehrte $C - H(A) \subset EH(A)$ zu beweisen, nehmen wir vorlaüfig an, dass es einen Punkt P gibt, der zu $C - H(A)$ aber nicht zu $EH(A)$ gehört. Der Punkt P liegt sicherlich im Zylinder (7), widrigenfalls nämlich würde er zu $EH(A)$ gehören (§ 2, 2).

Wir ziehen durch P irgendein Integral I des Hilfssystems (10) und setzen es bis zu der Ebene $x = a$ fort. Der Punkt der Ebene $x = a$, in welchem diese durch das erwähnte Integral getroffen wird, möge Q heißen.

Wir behaupten, dass auf I weder ein Punkt T der Zylinderfläche (9) noch ein Punkt $T \neq A$ der Ebene $x = a$ liegt. Wäre es nämlich nicht so, so hätten wir dann, von P nach links gehend, einen ersten Punkt $T (\neq P)$ von der erwähnten Eigenschaft. Der Teilbogen $[T, P]$ unseres Integrals liegt dann im Zylinder (6), erfüllt also (§ 2, 4) das System (5). Dieser Bogen verbindet den zu $EH(A)$ gehörenden Punkt T (§ 2, 2) mit dem dem Punkt P, der nicht zu $EH(A)$ gehört. Das Integral $[T, P]$ trifft also (§ 1, 5) die Menge $FEH(A)$ und folglich (§ 1, 3)[2] auch die Menge $H(A)$. P gehört also (§ 2, 3) zu $H(A)$, was der vorlaüfigen Voraussetzung widerspricht. Demgemäss liegt I im Zylinder (7) und gelangt bis zum Punkt A. Daraus geht hervor (§ 2. 4), dass I das System (5) erfüllt und infolgedessen, dass P, im Widerspruch mit unserer Voraussetzung, zu dem Integraltrichter $H(A)$ gehört (Vgl. die Definition von $H(A)$).

Folgerung 1. $FH(A) = F(C - H(A)) = FEH(A) =$
$= \overline{EH(A)} \cdot H(A)$[3].

---

[1]) Im Falle einer einzigen Differentialgleichung ($n = 1$) ist dieses Gebiet nicht zusammenhängend. Die Beziehung (11) besteht aber auch für diesen Fall.

[2]) $H(A)$ ist abgeschlossen s. z. B. T. Ważewski, Zur Theorie des Unitätsproblems etc. Matematische Zeitschrift Band 35, S. 558.

[3]) Die Menge $FH(A)$ war vom Herrn Kamke (Acta Math. Band. 58, S. 60) und von Herren Nagumo und Fukuhara [Proceed. of the Phys.-Math. Society of Japan (1930) S. 223] betrachtet

Hilfssatz 1. Sei Z eine abgeschlossene auf der Kreisscheibe (9) liegende Punktmenge, die noch die Eigenschaft besitzt, dass sie auf der Ebene $x=a$ den Punkt A von dem Punkte ∞ trennt (Vgl. § 1, 7).

Wir behaupten dann, dass jeder stetige Bogen L, der irgendeinen Punkt P aus $H(A)$ mit dem Punkt ∞ verbindet, immer die Menge $H(Z)$ {und folglich auch $FH(Z)$} schneidet.

Beweis. Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir an, dass L die Menge $H(Z)$ nicht schneidet. Es gibt ein Integral I, auf welchem die beiden Punkte A und P liegen (§ 2, 2).

Auf Grund eines Hilfssatzes, den wir in einer früheren Arbeit [1]) festgestellt haben, trifft der Bogen $L+I$ die Röhre $H(Z)$ in einem Punkt Q. Da P auf I „rechts" von Q liegt, muss P auf Grund von § 2, 3 zu $H(Z)$ gehören, und folglich schneidet L die Röhre $H(Z)$ im Punkt P was der Annahme widerspricht.

Hilfssatz 2. Unter den Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes ist das äußere Gebiet der Röhre $H(Z)$ in dem äußeren Gebiet des Integraltrichters $H(A)$ enthalten oder kurz

$$EH(Z)\subset EH(A).$$

In der Tat, nehmen wir an, dass es einen Punkt P gibt, der nicht zu $EH(A)$, sondern zu $EH(Z)$ gehört. P gehört also zu $H(A)$ selbst (Vgl. Satz 1).

Da P zu $EH(Z)$ gehört, kann man den Punkt P mit dem Punkt ∞ mittels eines stetigen $H(Z)$ nicht treffenden Bogen verbinden (Vgl. § 1, 6), was dem vorigen Hilfssatz widerspricht.

Folgerung 2.

$$\overline{EH(Z)}\subset\overline{EH(A)}$$

oder (Vgl. § 1, 3)

$$EH(Z)+FEH(Z)\subset EH(A)+FEH(A).$$

Satz 2. Das System (5) sei wiederum den Voraussetzungen V unterworfen. Z_ν sei eine unendliche Folge von abgeschlossenen und beschränkten Mengen, die alle auf der Ebene $x=a$ liegen und auf dieser Ebene den Punkt $A=(a, c, d)$ von dem Punkte ∞ trennen. Über Z_ν setzen wir noch voraus, dass der Duchmesser von Z_ν gegen Null konvergiert wenn $\nu\to\infty$. Unter diesen Voraussetzungen kon-

[1]) T. Ważewski l. c. S. 555.

vergiert (im Sinne von Hausdorff, Vgl. § 1, 8) die äußere Begrenzung der Röhre $H(Z_\nu)$ gegen die Begrenzung des Trichters $H(A)$. Mit anderen Worten (Vgl. Satz 1 und § 1, 4)

$$FEH(Z_\nu) \to FH(A) = FEH(A) = F(C - H(A)).$$

Beweis. Wir können voraussetzen, was sicher von einen gewissenen ν an stattfindet, dass alle Z_ν in der Kreisscheibe (8) liegen, dass also alle $H(Z_\nu)$ im Zylinder (7) gelegen sind.

Wir werden uns, auf die oben erwähnte (§ 1, 9) notwendige und hinreichende Bedingung für die Haussdorffsche Konvergenz stützen.

I. Nehmen wir eine, wachsende Folge von Indizes α_ν in Betracht, und nehmen wir an, dass 1° Q_{α_ν} einen Punkt der Menge $FEH(Z_{\alpha_\nu})$ bezeichnet und dass 2° $Q_{\alpha_\nu} \to Q$. Es soll zuerst bewiesen werden (Vgl. § 1, 9), dass Q zu $FH(A)$ gehört. Auf Grund der Folgerungen 1 und 2 und des Satzes 1 gehören die Punkte Q_{α_ν} zu der abgeschlossenen Menge

$$[C - H(A)] + FH(A)$$

und folglich gehört auch Q selbst zu dieser Menge. Der Beweisgang erfordert also den Nachweis, dass Q zu der Menge $C - H(A)$ nicht gehört, oder — was auf dasselbe hinausgeht — dass Q zu der Menge $H(A)$ gehört.

Bezeichne I_{α_ν} dasjenige Integral des Systems (5), das durch den Punkt Q_{α_ν} geht. I_{α_ν} schneidet die Ebene $x = a$ im Punkte A_{α_ν} der zu der Menge Z_{α_ν} gehört. Es ist leicht zu ersehen, dass $A_{\alpha_\nu} \to A$. Aus der Folge der Integrale I_{α_ν} lässt sich eine Teilfolge auswählen die gegen das eine der durch A und Q hindurchgehenden Integrale konvergiert[1]. Folglich gehört Q dem Trichter $H(A)$ an. Der erste Teil der Bedingung § 1, 9 ist somit bewiesen.

Daraus und aus der gemeinsamen (simultanen) Beschränktheit der Mengen $H(Z_\nu)$ erhalten wir noch das folgende Resultat.

II. Wenn L eine abgeschlossene Menge ist, deren Durchschnitt $H(A)$ leer ist, so ist — von einem gewissen ν angefangen — der Durchschnitt von L mit $FEH(Z_\nu)$ auch leer.

III. Um dem zweiten Teil der Bedingung des § 1, 9 zu beweisen, setzen wir voraus, dass ein Punkt P zu der Menge $FH(A)$

---

[1]) Dies folgt daraus, dass diese Folge von Integralen gleichgradig stetig und beschränkt ist.

gehört und das Ω eine Kugelumgebung des Punktes P bedeutet. Wir sollen beweisen, dass — von einem ν — jede Menge $FEH(Z_\nu)$ wenigstens einen mit Ω gemeinsamen Punkt besitzt. In der Tat in der Umgebung Ω liegt wenigstens ein Punkt Q, der nicht zu dem Integraltrichter $H(A)$ gehört[1]. Auf Grund des Satzes 1 und § 1, 6 läßt sich Q vermittels eines stetigen Bogen mit ∞ verbinden, sodass L den Integraltrichter $H(A)$ nicht trifft. Kraft des Hilfssatzes 1 haben alle Mengen $FEH(Z_\nu)$ gemeinsame Punkte mit der Menge, die aus L und aus dem Abschnitte $[P, Q]$ besteht.

Daraus geht unter der Berücksichtigung des Teiles II dieses Beweises hervor, dass — von einem gewissen ν angefangen — alle Mengen $FEH(Z_\nu)$ gemeinsame Punkte mit $[P, Q]$, also auch mit der, den Abschnitt $[P, Q]$ enthaltenden, Umgebung Ω besitzen. Damit ist der Beweis beendet (Vgl. § 1, 9).

Satz 3. Die Voraussetzungen des Satzes 2 wollen wir aufrechterhalten.

Mit $T_\nu(u)$ bezeichnen wir den Durchschnitt der aüsseren Grenze von $H(Z_\nu)$ (Vgl. § 1, 6) mit der Ebene $x = u$. Mit m_ν bezeichnen wir das Maximum des Durchmessers von $T_\nu(u)$ im Intervalle $a \leqslant u \leqslant b$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass durch den Punkt A genau eine Integralkurve des Systems (5) hindurchgeht beruht darauf, dass m_ν gegen Null konvergiert.

Beweis. Bezeichnen wir mit $D_\nu(u)$ den Durchschnitt der Röhre $H(Z_\nu)$ mit der Ebene $x = u$.

Der Durchmesser von $T_\nu(u)$ ist ersichtlich gleich dem Durchmesser von $D_\nu(u)$. Die Schwankung[2] der Schar von Integralen die zu $H(Z_\nu)$ gehören ist also gleich m_ν. Somit ist unser Satz zu einem früher von uns bewiesenen Satze[3]) zurückgefürt.

---

[1]) Ω bezeichnet eine Umgebung des Punktes P welcher der Grenze von $H(A)$ angehört.

[2]) Math. Zeitschrift, Band 35, S. 554, § 2a.

[3]) Ibidem S. § 561, Satz 4.

Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Par

Stanisław Turski (Kraków).

A. Haar[1]) a établi un théorème sur l'unicité et l'appréciation des intégrales de l'équation

$$(1) \qquad p = f(x, y, z, q).$$

M. Rosenblatt[2]) a démontré, par la même méthode, plusieurs généralisations de ce théorème. M. Ważewski[3]) a démontré, par une méthode différente de celle de Haar, des théorèmes sur l'unicité et l'appréciation des intégrales de l'équation

$$p = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n).$$

En nous servant de cette méthode nous montrons que les résultats de M. Ważewski subsistent sous des conditions plus générales. M. Ważewski suppose par exemple que, dans le théorème 2, l'inégalité (17) a lieu dans un ensemble à $2n+2$ dimensions de l'espace des points $(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$. Nous montrerons qu'il suffit de supposer que la même inégalité a lieu dans un ensemble à $n+2$ dimensions[4]).

---

[1]) „Comptes rendus" 2, VII, 1928 et „Acta Lit. ac Scient. Univ. Szeged" 1928, t, IV, p. 103.

[2]) Notes dans les „Comptes Rendus": 20, X, 1930; 8, VI, 1931; 17, X, 1932 et aussi „Bull. d. l. Soc. Math. de Grèce" T. XII (1931), p. 3 et „Rendic. d. R. Accad. N. dei Lincei" novembre 1932, p. 429.

[3]) „Rendiconti d. R. Accad. N. dei Lincei" novembre 1933, p. 372.

[4]) Présenté pendant la séance du 22.I. 1934 de la Soc. Pol. de Math. à Cracovie. Primitivement nous avons remarqué qu'il suffisait de supposer que les

L'exemple suivant expliquera le caractère de notre généralisation. Supposons que dans l'ensemble *(à quatre dimensions)*

(2) $\qquad 0 \leqslant x < a, \quad c + Lx \leqslant y \leqslant d - Lx, \quad q$ et z quelconques

où

$$L \geqslant 0, \quad c < d, \quad a < \frac{c-d}{2L}$$

on ait

(3) $$|f(x, y, z, q)| \leqslant L|q| + k|z|$$

k étant une constante non négative. Soit $\varphi(x, y)$ une intégrale de l'équation (1) qui pour $x = 0$, $c \leqslant y \leqslant d$ remplit l'inégalité $|\varphi(0, y)| \leqslant \leqslant h$ (h fixe). Ceci etant $\varphi(x, y)$ remplit (d'après Haar) dans l'ensemble (2) l'inégalité $|\varphi(x, y)| \leqslant he^{kx}$. Or, de notre théorème 2 il résulte que l'inégalité précédente subsiste lorsqu'on suppose que la relation (3) a lieu dans les trois ensembles à *trois dimensions*.

(E_1) $\quad 0 \leqslant x < a, \quad c + Lx < y < d - Lx; \quad q = 0,\ z$ quelconque,
(E_2) $\quad 0 \leqslant x < a, \quad y = c + Lx \quad ; \quad z$ et q quelconques,
(E_3) $\quad 0 \leqslant x < a, \quad y = d - Lx \quad ; \quad z$ et q quelconques.

L'ensemble E_1 est situé sur l'hyperplan à trois dimensions: $q = 0$. Les ensembles E_2 et E_3 appartiennent respectivement aux hyperplans (à trois dimensions) $y = c + Lx$ et $y = d - Lx$.

§ 1. *Notations.* Nous désignons par T l'ensemble des points $(x, y_1, \ldots, y_n)$ pour lesquels on a

(T) $\quad 0 \leqslant x < a, \quad c_\nu + L_\nu x \leqslant y_\nu \leqslant d_\nu - L_\nu x, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$

où

$$L_\nu \geqslant 0, \quad c_\nu < d_\nu, \quad 2L_\nu a \leqslant d_\nu - c_\nu.$$

Nous subdiviserons T en certains sousensembles $D(\alpha_1, \ldots, \gamma_t)$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ $(r + s + t = n)$ une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$. Nous désignons par

(4) $$C(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s; \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$$

l'ensemble des points $(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ qui satisfont aux relations:

---

inégalités des théorèmes 1, 2, 3 aient lieu dans un ensemble à $2n+1$ dimensions. C'est M. Ważewski qui a observé que nos raisonnements permettaient d'abaisser le nombre de dimensions en question à $n+2$.

(5) $c_{\alpha_\varrho} + L_{\alpha_\varrho} x < y_{\alpha_\varrho} < d_{\alpha_\varrho} - L_{\alpha_\varrho} x, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$

(6) $q_{\alpha_\varrho} = 0,$

(7) $y_{\beta_\sigma} = c_{\beta_\sigma} + L_{\beta_\sigma} x, \quad (\sigma = 1, \ldots, s)$

(8) $y_{\gamma_\tau} = d_{\gamma_\tau} - L_{\gamma_\tau} x, \quad (\tau = 1, \ldots, t)$

(9) z quelconque [5]).

Le système d'équations (6), (7), (8) représente un hyperplan à $n+2$ dimensions, car ces équations sont au nombre de $r+s+t=n$. L'ensemble (4) est situé sur cet hyperplan, il est donc un ensemble à $n+2$ dimensions. La somme de tous les ensembles (4) que nous désignerons par

$$U$$

est donc aussi à $n+2$ dimensions. Désignons enfin par

(10) $$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s; \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$$

la projection de l'ensemble (4) sur l'hyperplan à $n+1$ dimensions passant par les axes $x, y_1, \ldots, y_n$. Cet ensemble est défini par les relations (5), (7) et (8). La somme de tous les ensembles (10) donne évidemment le polyèdre T. Les différents ensembles (10) représentent manifestement ou l'intérieur du polyèdre T ou ses faces à n dimensions ou ses faces à $n-1$ dimensions etc. ou enfin ses faces à 1 dimension (arêtes).

§ 2. Voici un lemme plus précis qu'un lemme analogue de M. W a ż e w s k i [3]).

Lemme. Soit φ une fonction possédant dans T (v. plus haut) des dérivées partielles continues du premier ordre. Désignons par $M(u)$ le maximum de la fonction φ considérée sur la section $S(u)$ de T par le plan $x=u$. Désignons par $M'_+(x)$ la dérivée à droite de la fonction $M(x)$. Ceci étant, il existe sur la section $S(x)$ un point $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ tel qu'on a

(11) $$M'_+(x) = \frac{\partial \varphi(P)}{\partial x} - \sum_{\nu/1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi(P)}{\partial y_\nu} \right| L_\nu,$$

(12) $$M(x) = \varphi(P)$$

[5]) Il y a aussi à considérer les cas: I) $r=p$, II) $s=n$, III) $t=n$ ainsi que les cas où un des nombres $r+s$, $s+t$, $t+r$ serait égal à l'unité. Dans ces cas la définition sera analogue. Par exemple dans le cas I on supprimera les relations (7) et (8) et on obtiendra l'ensemble désigné par $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; 0; 0) = C(1, \ldots, n; 0; 0)$.

et qu'en même temps le point de coordonnées

$$(13) \qquad x, y_1, \ldots, y_n, \varphi(P), \frac{\partial \varphi(P)}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi(P)}{\partial y_n}$$

appartient à U. Une propriété identique subsiste pour la dérivée à gauche $M'_-(x)$.

Démonstration. L'existence du point P vérifiant (11) et (12) a été démontrée par M. Ważewski [3]). Il reste à prouver que le point (13) appartient à U. Or le point P appartient à un certain $D(\alpha_1,\ldots,\alpha_r; \beta_1,\ldots,\beta_s; \gamma_1,\ldots,\gamma_t)$. Les relations (5), (7) et (8) sont donc vérifiées. Il reste à prouver l'égalité (6). Considérons la fonction $\varphi(x, y_1,\ldots, y_{\alpha_{\varrho-1}}, \eta, y_{\alpha_{\varrho+1}},\ldots, y_n)$ de la variable η. Elle prend la valeur maxima pour $\eta = y_{\alpha_\varrho}$ (cf. (12)) et cette valeur y_{α_ϱ} est située à l'intérieur de l'intervalle (5). Il en résulte que $q_{\alpha_\varrho} = \frac{\partial \varphi(P)}{\partial y_{\alpha_\varrho}} = 0$ et c'est ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration pour $M'_-(x)$ est analogue.

Théorème 1. Admettons que fonction figurant dans l'équation

$$(14) \qquad \frac{dz}{dx} = \sigma(x, |z|)$$

soit continue dans la bande (ouverte à gauche) $0 < x < a$, $z \geqslant 0$. Supposons que l'équation (14) admette une intégrale unique $\gamma(x)$ pour laquelle $\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$ et supposons que cette intégrale soit identiquement nulle dans l'intervalle $0 < x < a$. Considérons l'équation

$$(15) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1 \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right)$$

et supposons que pour les points: 1^0) appartenant au domaine d'existence de f et 2^0) tels que le point auxiliaire

$$x, y_1, \ldots, y_n, \bar{q}_1 - q_1, \bar{q}_2 - q_2, \ldots, \bar{q}_n - q_n$$

appartienne à l'ensemble à $n+2$ dimensions U (cf. § 1), on ait

$$(16) \qquad \begin{aligned} &|f(x, y_1, \ldots, y_n, \bar{z}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n) - f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu |\bar{q}_\nu - q_\nu| + \sigma(x, |\bar{z} - z|). \end{aligned}$$

Soient ψ_1 et ψ_2 deux intégrales de (15) qui sont identiques sur $S(0)$ (cf. les notations du lemme) et possèdent dans T des dérivées partielles continues du premier ordre. Ceci étant, ψ_1 et ψ_2 sont identiques dans T.

Démonstration. Grâce à notre lemme la démonstration se déroulera exactement de la même façon que chez M. Ważewski[3]). Nous posons $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ et formons la fonction $M(x)$. Sur la section $S(0)$ subsistent les identités $\varphi \equiv 0$, $\varphi'_x \equiv 0$, $\varphi'_{y_\nu} \equiv 0$ et par suite, en vertu de notre lemme, on aura $M(0) = M'_+(0) = 0$. En rapprochant les relations (11) et (16) nous aurons $M'_\pm(x) \leqslant \sigma(x, |M(x)|)$. Il s'ensuit[6]) que $M(x) \leqslant 0$ (pour $0 \leqslant x < a$). On a par conséquent $\varphi \leqslant 0$, dans T. En appliquant enfin ce raisonnement à la fonction $-\varphi = \psi_2 - \psi_1$ nous voyons que $-\varphi \leqslant 0$ dans T. c. q. f. d.

D'une façon analogue nous démontrerons les théorèmes:

Théorème 2. Supposons que la fonction $\sigma(x, |z|)$ soit continue dans la bande (fermée à gauche) $0 \leqslant x < a$. Soit $k \geqslant 0$. Désignons par $\tilde{\omega}(x)$ l'intégrale supérieure, issue du point $x = 0$, $z = k$, de l'équation (14) et supposons que $\tilde{\omega}(x)$ existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$. Supposons que, pour les points du domaine d'existence de f qui appartiennent à l'ensemble à $n+2$ dimensions U, on ait:

$$(17) \qquad |f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)| \leqslant \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu |q_\nu| + \sigma(x, |z|).$$

Soit enfin φ une intégrale de (15) possédant dans T des dérivées partielles continues du premier ordre et vérifiant sur $S(0)$ l'inégalité $|\varphi| \leqslant k$.

Ceci étant, on a $|\varphi| \leqslant \tilde{\omega}(x)$ dans T.

Théorème 3 Gardons pour f l'hypothèse du théorème 1 et pour σ celle du théorème 2. On aura pour deux intégrales φ et ψ de (15), possédant dans T des dérivées partielles continues du premier ordre, l'inégalité $|\varphi - \psi| \leqslant \tilde{\omega}(x)$ qui subsiste dans T pourvu que $|\varphi - \psi| \leqslant k$ sur $S(0)$.

Remarque. Les théorèmes précédents et le lemme peuvent être étendus au cas où T n'est pas un polyèdre. Soit par exemple,

---

[6]) E. Kamke: Über eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen. Sitzber. d. Heidelberger Akad. 1930. 17 Abh., p. 8.

dans le cas $n = 1$, T l'ensemble défini par les inégalités:

$$0 \leqslant x < a$$
$$g(x) \leqslant y \leqslant h(x).$$

Nous supposons que l'on a, dans intervalle $0 \leqslant x < a$, les relations:

$$g(x) < h(x), \quad g'(x) \geqslant 0, \quad h'(x) \leqslant 0$$

les dérivées $g'(x)$, $h'(x)$ étant continues.

Remplaçons dans le théorème 2 l'inégalité (17) par les inégalités:

$$\begin{array}{ll} |f(x, y, z, 0)| \leqslant \sigma(x, |z|) & \text{lorsque } g(x) < y < h(x), \\ |f(x, y, z, q)| \leqslant \sigma(x, |z|) + |h'(x)|\,|q| & \text{lorsque } y = h(x), \\ |f(x, y, z, q)| \leqslant \sigma(x, |z|) + |g'(x)|\,|q| & \text{lorsque } y = g(x). \end{array}$$

En conservant relativement à φ et σ les autres hypothèses du théorème 2, nous concluons que $|\varphi| \leqslant \tilde{\omega}(x)$ dans T.

Cette remarque peut être étendue au cas $n > 1$.

Instytut Matematyczny U. J. Kraków.

Sur les coordonnées polaires sur une surface.

Par

St. Gołąb (Kraków).

Soit V_2 [1]) une surface plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions R_3 représentée sous la forme paramétrique

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2), \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Définition. Nous dirons que la représentation paramétrique (1) de la surface V_2 est de classe $C^n (n \geqslant 1)$ dans un domaine (D) lorsque les deuxièmes membres des équations (1) possèdent, dans ce domaine, des dérivées partielles continues de l'ordre n par rapport à u^1, u^2 et lorsque le rang de la matrice

$$\left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \right\| \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2 \end{matrix} \right) \tag{2}$$

est égal à 2.

Soit P_0 un point intérieur de V_2 [2]). Admettons que les conditions de régularité soient suffisantes pour l'existence des lignes géodésiques sur V_2 [3]). Considérons les géodésiques issues de P_0 et désignons par g_0 une géodésique quelconque de cette sorte. Considérons ensuite sur V_2 un système local des coordonnées polaires (s, θ) en choisissant P_0 pour pôle; s représentera, par conséquent, la

---

[1]) Nous désignons par V_n un espace riemannien à n dimensions.

[2]) Cela veut dire que P_0 correspond à un couple de valeurs $\underset{0}{u^1}, \underset{0}{u^2}$ ou $(\underset{0}{u^1}, \underset{0}{u^2})$ est un point intérieur du domaine (D).

[3]) Voir § 3.

longueur de la géodésique joignant le point P_0 avec des points P suffisamment voisins[4]) et θ désignera l'angle

(3) $$0 \leqslant \theta < 2\pi$$

contenu entre cette géodésique et la géodésique g_0.

Les coordonnées polaires sont bien commodes dans maintes questions et ne présentent pas de difficultés tant qu'il s'agit des surfaces analytiques. En supposant cependant uniquement que la surface V_2 est de classe C^n on est obligé de soumettre l'ordre de la régularité de la représentation polaire à un examen spécial. C'est ce qui constituera l'objet du présent travail destiné à l'approfondissement des fondements de la géométrie différentielle classique.

Je me suis intéressé à cette question au cours d'une conversation avec M^lle^ J. Dymnicka.

§ 1. Si la surface V_2 est, dans une représentation paramétrique u^i, de classe C^1 elle le sera dans toute représentation résultant de la précédente par une transformation

(4) $$\overline{u}^i = \overline{u}^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2)$$

de classe C^1, c.-à-d. transformation pour laquelle les dérivées $\dfrac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^k}$ sont continues et le jacobien

(5) $$\Delta = \left| \frac{\partial \overline{u}^i}{\partial u_k} \right|$$

n'est pas nul. Observons que, au cas des transformations $u^i \to \overline{u}^i$ de classe C^1 certains objets géométriques[5]), relatifs à V_2, sont bien déterminés. Il en est ainsi pour le tenseur fondamental (ou métrique) de cette surface, tenseur dont les composantes ont la forme

(6) $$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^k} \text{ [6])} \qquad (i, k = 1, 2).$$

---

[4]) Toutes nos considérations ont un caractère purement local bien que des recherches sous un aspect général ont été faites dans cette direction. Cf. p. ex. le beau travail de M. L. Bieberbach, Über Tchebychefsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten, Sitzungsber. der Preuss. Akad. d. Wiss. 23 (1926), 294—321.

[5]) D'après la terminologie introduite par Veblen et Schouten.

[6]) Les composantes g_{11}, g_{12}, g_{22} de ce tenseur sont désignées dans la géométrie classique respectivement par E, F, G.

La matrice (2) étant d'ordre 2, il en résulte en vertu de l'identité de Lagrange que

(7) $$g = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 > 0.$$

En supposant que V_2 est, dans une représentation paramétrique, de classe C^2, on pourra déterminer les symboles de Christoffel de la première et de la seconde espèce qui peuvent, comme on le sait bien, être considérés comme paramètres d'un déplacement parallèle sur la surface [7]). On pourra aussi déterminer le deuxième tenseur h_{ij} [8]) (dont les composantes représentent les coefficients de la deuxième forme différentielle fondamentale de la surface V_2). Ce tenseur permettra de déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de V_2. Il sera intéressant de remarquer (ce qui n'a été observé par personne — si je le sais bien —) que la définition tensorielle de la courbure de Gauss au moyen du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci [9]) nécessite la régularité de classe C^3 de la surface V_2. Ceci provient de ce que tout espace riemannien à deux dimensions est forcément un espace d'Einstein [10]) ce qui n'est pas juste pour les espaces à plusieurs dimensions.

Il est inutile d'ajouter qu'en examinant la géométrie d'une surface de classe C^2 on doit se restreindre au groupe de transformations des coordonnées, groupe qui est de classe C^2. Une restriction allant plus loin est nécessaire pour les surfaces dont l'ordre de régularité est plus haut.

§ 2. Pour la surface V_2 qui est de classe C^1 (dans une représentation paramétrique u^i), on peut, au voisinage d'un point quelconque intérieur P_0, déterminer sans ambiguité une des deux orientations possibles dépendant du système des coordonnées curvilignes u^i. Ceci est possible par la détermination du bivecteur non nul sur V_2 en point P_0. On dit qu'un vecteur v^α issu du point P_0 est situé sur la surface V_2, lorsque il existe dans le plan des variables u^i,

---

7) Au sens de M. Levi-Civita.

8) On emploie pour les composantes de ce tenseur des notations L, M, N ou D, D', D''.

9) Cf. p. ex. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül ou L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry.

10) Un espace riemannien est appelé l'espace d'Einstein s'il subsiste la relation $R_{ik} = \sigma g_{ik}$ où R_{ik} est le tenseur de Ricci et σ represente un scalaire.

un vecteur w^i tel que

$$v^\alpha = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)_{P_0} \cdot w^i \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Chaque vecteur v^α situé sur V_2 peut être ainsi caractérisé par ses „composantes planes“ w^i. Grâce à l'hypothèse sur le rang de la matrice (2) le vecteur v^α ne sera pas nul lorsque $\sum_i |w^i| > 0$. Deux vecteurs $\underset{1}{v^\alpha}$, $\underset{2}{v^\alpha}$ seront linéairement indépendents lorsque les vecteurs, correspondants $\underset{1}{w^i}$, $\underset{2}{w^i}$ le seront. Un couple ordonné de vecteurs linéairement indépendents détermine un bivecteur non nul $b^{ik} = \underset{1}{w}{}^{[i} \underset{2}{w}{}^{k]}$ [11]. Considérons, en un même point $u^i = \underset{0}{u^i}$ deux bivecteurs non nuls $\underset{1}{b^{ik}} = \underset{1}{w}{}^{[i} \underset{2}{w}{}^{k]}$, $\underset{2}{b^{ik}} = \underset{3}{w}{}^{[i} \underset{4}{w}{}^{k]}$. Les vecteurs $\underset{1}{w}$, $\underset{2}{w}$ étant linéairement indépendents on aura les relations

$$\underset{3}{w^i} = \underset{3}{\alpha}\, \underset{1}{w^i} + \underset{3}{\beta}\, \underset{2}{w^i}, \quad \underset{4}{w^i} = \underset{4}{\alpha}\, \underset{1}{w^i} + \underset{4}{\beta}\, \underset{2}{w^i} \tag{9}$$

et les relations réciproques

$$\underset{1}{w^i} = \underset{1}{\alpha}\, \underset{3}{w^i} + \underset{1}{\beta}\, \underset{4}{w^i}, \quad \underset{2}{w^i} = \underset{2}{\alpha}\, \underset{3}{w^i} + \underset{2}{\beta}\, \underset{4}{w^i}. \tag{10}$$

Mais l'on a

$$\begin{vmatrix} \underset{3}{w^1}, \underset{3}{w^2} \\ \underset{4}{w^1}, \underset{4}{w^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{1}{w^1}, \underset{1}{w^2} \\ \underset{2}{w^1}, \underset{2}{w^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{3}{\alpha}, \underset{3}{\beta} \\ \underset{4}{\alpha}, \underset{4}{\beta} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \underset{1}{w^1}, \underset{1}{w^2} \\ \underset{2}{w^1}, \underset{2}{w^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{3}{w^1}, \underset{3}{w^2} \\ \underset{4}{w^1}, \underset{4}{w^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha}, \underset{1}{\beta} \\ \underset{2}{\alpha}, \underset{2}{\beta} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Les bivecteurs $\underset{1}{b}$, $\underset{2}{b}$ étant non nuls il en résulte que les deux déderminants:

$$\begin{vmatrix} \underset{3}{\alpha}, \underset{3}{\beta} \\ \underset{4}{\alpha}, \underset{4}{\beta} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha}, \underset{1}{\beta} \\ \underset{2}{\alpha}, \underset{2}{\beta} \end{vmatrix} \tag{12}$$

sont différents de zéro. Ils sont du même signe car

$$\begin{vmatrix} \underset{3}{\alpha}, \underset{3}{\beta} \\ \underset{4}{\alpha}, \underset{4}{\beta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha}, \underset{1}{\beta} \\ \underset{2}{\alpha}, \underset{2}{\beta} \end{vmatrix} = 1. \tag{13}$$

---

[11]) Nous nous servons de la notation de M. Schouten (cf. [9]))

$$\underset{1}{w}{}^{[i} \underset{2}{w}{}^{k]} = \tfrac{1}{2}(\underset{1}{w^i}\underset{2}{w^k} - \underset{1}{w^k}\underset{2}{w^i}).$$

Les bivecteurs $\underset{1}{b}^{ik}$, $\underset{2}{b}^{ik}$ seront considérés comme possédant la même orientation ou des orientations opposées suivant que le signe des déterminants (12) est positif ou négatif; c'est une propriété géométrique c.-à-d. invariante par rapport aux transformations du système des coordonnées (4). Ceci est manifeste, car les valeurs α et β dans les formules (9) et (10) ne changent pas lorsqu'on remplace w par $\bar{w}$. La totalité des bivecteurs se répartit ainsi en deux catégories, chacune composée des bivecteurs de la même orientation. Chacune de ces catégories est parfaitement déterminée lorsqu'on se donne un bivecteur non nul; l'orientation du plan (u) correspondant à chacune de ces catégories sera aussi ainsi déterminée. En disposant, dans le plan (u), d'un systeme de coordonnées u^i nous attribuons par cela même un rôle privilégié au couple de vecteurs unitaires $\underset{1}{e}^i(1, 0)$, $\underset{2}{e}^i(0, 1)$ c.-à-d. au bivecteur $E^{ik} = \underset{1}{e}^{[i}\underset{2}{e}^{k]}$ et nous spécifions ainsi l'orientation du plan (u). Comme $\begin{vmatrix} \underset{1}{e}^1, & \underset{1}{e}^2 \\ \underset{2}{e}^1, & \underset{2}{e}^2 \end{vmatrix} = 1$, donc le bivecteur du couple $(\underset{1}{w}^i, \underset{2}{w}^i)$ possède la même orientation ou l'orientation opposée suivant que le determinant $\begin{vmatrix} \underset{1}{w}^1, & \underset{1}{w}^2 \\ \underset{2}{w}^1, & \underset{2}{w}^2 \end{vmatrix}$ est positif ou négatif. L'orientation du plan (u) ainsi obtenue dépendra évidemment du système des coordonnées u^i et elle changera ou non, suivant que le jacobien Δ de la transformation est négatif ou positif. Ceci résulte de ce qu'en désignant par $\underset{k}{\bar{w}}^i$ les composantes du vecteur $\underset{k}{w}^i$ dans le système de coordonnées $(\bar{u}^i)$ on aura dans ce système l'égalité

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \underset{1}{\bar{w}}^1, & \underset{1}{\bar{w}}^2 \\ \underset{2}{\bar{w}}^1, & \underset{2}{\bar{w}}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{1}{w}^1, & \underset{1}{w}^2 \\ \underset{2}{w}^1, & \underset{2}{w}^2 \end{vmatrix} \cdot \Delta .$$

L'orientation du plan (u) prescrit automatiquement l'orientation de la surface V_2. Au couple des vecteurs unitaires $\underset{1}{e}^i$, $\underset{2}{e}^i$ dans le plan (u) correspond le couple des vecteurs

$$(15) \qquad \underset{i}{B}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \qquad (i = 1, 2)$$

dont le bivecteur détermine l'orientation de la surface V_2.

L'orientation locale de V_2 étant donnée, on peut définir la notion de l'angle orienté contenu entre deux vecteurs non nuls issus d'un point P_0 de notre surface. Soient $\underset{1}{w^i}$ et $\underset{2}{w^i}$ leur composantes „planes". L'angle Θ (non orienté et dont la valeur n'est pas parfaitement déterminée) contenu entre ces vecteurs satisfait à la relation bien connue

$$(16) \qquad \cos\Theta = \frac{(g_{ik})_0 \underset{1}{w^i} \underset{2}{w^k}}{\sqrt{(g_{ik})_0 \underset{1}{w^i} \underset{1}{w^k}} \cdot \sqrt{(g_{ik})_0 \underset{2}{w^i} \underset{2}{w^k}}} = f(\underset{1}{w}, \underset{2}{w})\ ^{12}).$$

Si nous voulons obtenir l'angle orienté et parfaitement déterminé (relativement à l'orientation choisie sur V_2) contenu entre ces vecteurs (formant un couple ordonné $\underset{1}{w}$, $\underset{2}{w}$) nous sommes obligés de le définir par l'égalité suivante:

$$(17) \qquad \Theta = (1-\varepsilon)\pi + \varepsilon \arccos f(\underset{1}{w}, \underset{2}{w}),$$

où ε est égal à $+1$ ou -1 suivant que le déterminant

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} \underset{1}{w^1}, & \underset{1}{w^2} \\ \underset{2}{w^1}, & \underset{2}{w^2} \end{vmatrix}$$

est non négatif ou negatif. Il se présentera quatre cas suivants suivant que le déterminant (18) est 1°) positif, 2°) negatif, 3°) nul et $f(\underset{1}{w}, \underset{2}{w}) = 1$, 4°) nul et $f(\underset{1}{w}, \underset{2}{w}) = -1$. L'angle Θ qui est ainsi parfaitement déterminé satisfait à l'inégalité (3).

§ 3. Au cas où la surface V_2 est, dans la représentation paramétrique (1) de classe C^2, on peut, suivant la remarque du § 1, former les symboles de Christoffel de la deuxième espèce,

$$(19) \qquad \left\{ {k \atop ij} \right\} = \tfrac{1}{2} g^{kl} [\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}],$$

où g^{kl} représentent les composantes contravariantes du tenseur métrique, et ∂_i représente — sous une forme abrégée — l'opérateur $\partial/\partial u^i$. Ainsi nous pouvons donner une définition formelle du système

---

[12]) Le signe de sommation est omis (d'après Einstein) en tous cas quand on doit étendre la sommation à deux indices, un de ces indices étant contravariant, le deuxième covariant.

des géodésiques sur la surface V_2 de la façon suivante. Nous entendrons par géodésiques les courbes

$$u^i = u^i(s) \qquad (i = 1, 2) \tag{20}$$

qui satisfont aux équations différentielles linéaires du second ordre

$$\frac{d^2 u^k}{d s^2} + \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{d u^i}{d s} \frac{d u^j}{d s} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{21}$$

Nous laissons à part la relation entre plusieurs définitions connues des géodésiques en adoptant cette définition formelle (qui n'est pas géométrique). On peut démontrer que cette définition est intrinsèque.

En supposant en plus que la surface est de classe C^3 (il suffirait de supposer qu'elle est de classe L^2 c.-à-d. que les dérivées du second ordre des deuxièmes membres des relations (1) satisfont à la condition de Lipschitz) on peut démontrer (une démonstration rigoureuse a été donnée pour la première fois par M. J. H. C. Whitehead[13]) que deux points suffisamment voisins se laissent joindre par une seule géodésique située dans le voisinage envisagé.

§ 4. Le paramètre s représente la longueur de l'arc de la géodésique lorsqu'on suppose que

$$g_{ik} \frac{d u^i}{d s} \frac{d u^k}{d s} = 1. \tag{22}$$

Observons que cette relation subsiste pour tous les points de la géodésique lorsqu'elle subsiste en un seul point:

$$\left(g_{ik} \frac{d u^i}{d s} \frac{d u^k}{d s} \right)_0 = 1. \tag{23}$$

Ceci résulte facilement de ce que l'expression $\varphi = g_{ik} \dfrac{d u^i}{d s} \cdot \dfrac{d u^k}{d s}$ représente un scalaire et que

$$D(\varphi) = D(g_{ik}) \cdot \frac{d u^i}{d s} \frac{d u^k}{d s} + 2 g_{ik} \frac{d u^i}{d s} D\left(\frac{d u^k}{d s}\right) = 2 g_{ik} \frac{d u^i}{d s} D\left(\frac{d u^k}{d s}\right) \tag{24}$$ [14]

car $D(g_{ik}) = 0$. Mais on a

$$D\left(\frac{d u^k}{d s}\right) = \frac{d^2 u^k}{d s^2} + \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{d u^i}{d s} \frac{d u^j}{d s} \tag{25}$$

---

[13]) J. H. C. Whitehead. Convex regions in the geometry of paths, Quarterly Journ. of Math. Oxford Ser Vol. 3, N. 9 (1932), 33—42.

[14]) D est le symbole de la dérivation covariante. Cf. J. A. Schouten, l. c. [9]).

et par conséquent on a pour la géodésique $D\left(\frac{du^k}{ds}\right)=0$ c.-à-d. $D(\varphi)=0$. Comme $D(\varphi)=\frac{d\varphi}{ds}$, on obtient donc $\varphi=\text{Const.}$, ce qui prouve que la relation (22) résulte de la relation (23).

§ 5. *Nous supposons dans la suite que la surface V_2 est de classe C^3.*

Nous mettrons les équations des géodésiques sous une autre forme en intégrant les equations (21). En posant

$$w^k=\frac{du^k}{ds} \tag{26}$$

nous voyons que le système (21) est équivalent au système des équations du premier ordre

$$\frac{du^k}{ds}=w^k,\ \frac{dw^k}{ds}=-\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}w^i w^j \qquad (k=1,2) \tag{27}$$

à quatre fonctions inconnues u^1, u^2, w^1. w^2 que nous désignons par raison de symétrie par

$$u^1=y_1,\quad u^2=y_2,\quad w^1=y_3,\quad w^2=y_4. \tag{28}$$

Le système (27) revêtira donc la forme

$$\frac{dy_i}{ds}=f_i(s;\,y_1,y_2,y_3,y_4)=f_i(y_1,y_2,y_3,y_4)\quad (i=1,2,3,4) \tag{29}$$

où

$$\begin{aligned} f_1&=y_3, & f_3&=-\left[\begin{Bmatrix}1\\ 11\end{Bmatrix}(y_3)^2+2\begin{Bmatrix}1\\ 12\end{Bmatrix}y_3y_4+\begin{Bmatrix}1\\ 22\end{Bmatrix}(y_4)^2\right]\\ f_2&=y_4, & f_4&=-\left[\begin{Bmatrix}2\\ 11\end{Bmatrix}(y_3)^2+2\begin{Bmatrix}2\\ 12\end{Bmatrix}y_3y_4+\begin{Bmatrix}2\\ 22\end{Bmatrix}(y_4)^2\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Les valeurs initiales $\overset{0}{y^i}$ déterminent une solution unique du système (29) que nous exprimerons au moyen des „fonctions caractéristiques“[15])

$$y_i=\varphi_i(s\,|\,\sigma;\,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\qquad (i=1,2,3,4). \tag{31}$$

---

[15]) Nous les appelons ainsi d'après M. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen 1932, p. 154.

Les deuxièmes membres de ces équations représentent la solution du système (29), solution qui pour $s=\sigma$ prend la valeur $y_i=\eta_i$. Pour que les équations

$$u^i=\varphi_i(s|\sigma;\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) \qquad (i=1,2) \tag{32}$$

considérées pour $\sigma,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ fixes et s variable représentent une ligne géodésique il faut et il suffit que le point (η_1,η_2) soit situé dans le domaine où les deuxièmes membres des équations (1) sont déterminés et que la courbe (32) ne se réduise pas à un point, ce qui est équivalent à ce qu'ait lieu l'inégalité

$$|\eta_3|+|\eta_4|>0. \tag{33}$$

Supposons en effet que $\dfrac{d\varphi_i}{ds}=0$ pour $i=1,2$. Il en résulte $\eta_3=\eta_4=0$ car

$$\eta_3=\left(\frac{d\varphi_1}{ds}\right)_{s=\sigma}, \quad \eta_4=\left(\frac{d\varphi_2}{ds}\right)_{s=\sigma}. \tag{34}$$

Réciproquement, supposons que $\eta_3=0$, $\eta_4=0$. Nous aurons alors pour $s=\sigma$: $\left(g_{ik}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\right)_\sigma=(g_{ik})_0\,\eta_{i+2}\,\eta_{k+2}=0$ d'où en vertu du § 4 résulte l'identité suivante en s:

$$g_{ik}\frac{d\varphi_i}{ds}\frac{d\varphi_k}{ds}=0, \tag{35}$$

ce qui conduit à l'identité $\dfrac{d\varphi_i}{ds}=0$ car la forme $g_{ik}\xi^i\xi^k$ est positive.

§ 6. Choisissons sur la surface V_2 un point intérieur P_0 correspondant dans le système u^i aux valeurs $u^i=\underset{0}{u^i}$. Sans effet sur la généralité des résultats on peut se borner au cas

$$\underset{0}{u^i}=0 \qquad (i=1,2) \tag{36}$$

car les relations (36) peuvent être obtenues par une transformation linéaire (donc de classe de régularité arbitrairement grande) du système des coordonnées.

Nous appellerons *rayon géodésique* (issu du point P_0) la partie de la géodésique définie par les équations

$$u^i=\varphi_i(s|0;0,0,\eta_3,\eta_4) \quad \text{pour} \quad s\geqslant 0 \qquad (i=1,2). \tag{37}$$

On démontre facilement que le point P_0 constitue l'origine des rayons géodésiques ($s = 0$) et que les deux rayons géodésiques

$$(38) \qquad \begin{cases} u^i = \varphi_i(s\,|\,0;\, 0,\, 0,\, \eta_3,\, \eta_4) \\ u^i = \varphi_i(s\,|\,0;\, 0,\, 0,\, -\eta_3,\, -\eta_4) \end{cases}$$

appartiennent à la même géodésique passant par P_0.

Supposons que les nombres η_3, η_4 satisfassent à la relation

$$(39) \qquad \lambda(\eta_3)^2 + 2\mu\eta_3\eta_4 + \nu(\eta_4)^2 = 1\ ^{16)}$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$(40) \qquad \lambda = g_{11}(0, 0), \quad \mu = g_{12}(0, 0), \quad \nu = g_{22}(0, 0).$$

Nous avons

$$(41) \qquad \left[g_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)\, \frac{d\varphi_i}{ds}\, \frac{d\varphi_k}{ds} \right]_{s=0} = 1$$

et en raison du § 4 nous en déduisons

$$(42) \qquad g_{ik}(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) \frac{d\varphi_i}{ds} \frac{d\varphi_k}{ds} \equiv 1.$$

De là il résulte que, dans les équations du rayon géodésique, le paramètre s représente l'arc alors et seulement alors que subsiste la relation (39). Si les nombres η_3 et η_4 ne remplissent pas la condition (39) mais vérifient l'inégalité (33) alors, dans les équations (32) de la géodésique le paramètre s ne représente pas l'arc, il est cependant déterminé à une transformation linéaire d'arc près et dans les équations (37) à une transformation linéaire et homogène près[17].

Supposons que les nombres η_3, η_4 verifient la relation (39). Comme pour P_0 on a $s = 0$ et comme $s \geqslant 0$ il en résulte que le paramètre s représente la longueur de la géodésique joignant le point P de coordonnées $u^i = \varphi_i(s\,|\,0;\, 0,\, 0,\, \eta_3,\, \eta_4)$ au point P_0, c.-à-d. qu'il représente la distance géodésique du point P au point P_0.

§ 7. Choisissons un rayon géodésique g_0 issu du point P_0 et déterminé par le choix des nombres $\overset{0}{\eta}_3$, $\overset{0}{\eta}_4$. Nous supposons en plus que

$$(43) \qquad \lambda(\overset{0}{\eta}_3)^2 + 2\mu\overset{0}{\eta}_3\overset{0}{\eta}_4 + \nu(\overset{0}{\eta}_4)^2 = 1$$

---

[16]) De là résulte en particulier que l'inégalité (33) est vérifiée.

[17]) Voir p. ex. L. P. Eisenhart, l. c. [9]) p. 51.

ce qui — comme nous l'avons vu plus haut — garantit que le paramètre s représente la distance géodésique du point variable P du rayon g_0 au point P_0. Soit θ un nombre jouissant de la propriété (3) et envisageons un rayon géodésique g déterminé par les nombres η_3, η_4 qui sont donnés par les relations

$$\left|\begin{aligned} \eta_3 &= \eta_3(\theta) = \overset{0}{\eta}_3 \cos\theta - \frac{\beta}{W}\sin\theta \\ \eta_4 &= \eta_4(\theta) = \overset{0}{\eta}_4 \cos\theta + \frac{\alpha}{W}\sin\theta \end{aligned}\right. \tag{44}$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$W = \sqrt{\lambda\nu - \mu^2} \tag{45}$$

$$\alpha = \lambda\overset{0}{\eta}_3 + \mu\overset{0}{\eta}_4, \quad \beta = \mu\overset{0}{\eta}_3 + \nu\overset{0}{\eta}_4. \tag{46}$$

Nous affirmons que l'angle orienté contenu entre les rayons g_0 et g est égal è θ. Nous démontrons d'abord par un calcul facile que les nombres η_3, η_4 définis par les relations (44) satisfont à l'équation (39). Comme l'on a

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right)_{s=0} = \eta_3, \quad \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\right)_{s=0} = \eta_4 \tag{47}$$

nous constatons que l'angle orienté ω contenu entre les rayons g_0 et g vérifie la relation

$$\cos\omega = \lambda\overset{0}{\eta}_3\eta_3 + \mu(\overset{0}{\eta}_3\eta_4 + \overset{0}{\eta}_4\eta_3) + \nu\overset{0}{\eta}_4\eta_4. \tag{48}$$

Par un calcul élémentaire nous parvenons au résultat:

$$\cos\omega = \cos\theta. \tag{49}$$

Soit $\underset{1}{w}$ le vecteur de coordonnées $(\overset{0}{\eta}_3, \overset{0}{\eta}_4)$, $\underset{2}{w}$ le vecteur de coordonnées $(\eta_3(\theta), \eta_4(\theta))$. Nous constatons que

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{w}^1, \underset{1}{w}^2 \\ \underset{2}{w}^1, \underset{2}{w}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{0}{\eta}_3, \overset{0}{\eta}_4 \\ \eta_3, \eta_4 \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta}{W}. \tag{50}$$

Comme l'on a (cf. § 2)

$$\omega = (1-\varepsilon)\pi + \varepsilon \arccos[\cos\theta] \tag{51}$$

donc nous obtenons: $\omega = 0$ pour $\theta = 0$, $\omega = \pi$ pour $\theta = \pi$ dans le cas $\sin\theta = 0$. Si $0 < \theta < \pi$ le déterminant est positif et par

suite $\varepsilon = 1$ et $0 < \omega < \pi$. Si $\pi < \theta < 2\pi$, ce déterminant est négatif et par conséquent $\varepsilon = -1$ d'où $\pi < \omega < 2\pi$. Ceci rapproché à l'égalité (49) donne la conclusion

$$\omega = \theta. \tag{52}$$

c. q. f. d.

§ 8. Introduisons maintenant les notations suivantes:

$$\begin{cases} \Omega_1(s, \theta) = \varphi_1(s \,|\, 0; 0, 0, \eta_3(\theta), \eta_4(\theta)) \\ \Omega_2(s, \theta) = \varphi_2(s \,|\, 0; 0, 0, \eta_3(\theta), \eta_4(\theta)) \end{cases} \tag{53}$$

et considérons la transformation déterminée par les équations

$$\begin{cases} u^1 = \Omega_1(s, \theta) \\ u^2 = \Omega_2(s, \theta) \end{cases} \tag{54}$$

dans le domaine

$$\begin{cases} 0 \leqslant s \leqslant \delta, \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi, \end{cases} \tag{55}$$

où δ désigne un nombre positif suffisamment petit. La représentation paramétrique u^i de la surface V_2 étant de classe C^3, les symboles de Christoffel possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues. Les deuxièmes membres des équations (29) possèdent donc (cf. (30)) des dérivées partielles du premier ordre (calculées relativement aux y_i) continues et d'après un théorème connu[18]) les deuxièmes membres des relations (31) possèdent, relativement aux variables η_i, des dérivées partielles du premier ordre continues. Des relations (47) et (53) il s'ensuit que

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial s}\right)_{s=0} = \eta_3(\theta), \quad \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial s}\right)_{s=0} = \eta_4(\theta). \tag{56}$$

De la définition des fonctions φ_1, φ_2 il résulte en plus que

$$\begin{cases} \varphi_1(0 \,|\, 0; 0, 0, \eta_3(\theta), \eta_4(\theta)) = 0, \\ \varphi_2(0 \,|\, 0; 0, 0, \eta_3(\theta), \eta_3(\theta)) = 0 \end{cases} \tag{57}$$

d'où l'on obtient

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta}\right)_{s=0} = 0, \ \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta}\right)_{s=0} = 0. \tag{58}$$

---

[18]) Voir p. ex. E. Kamke. l. c. [16]) p. 164—166.

Des équations (56) et (58) il résulte qu'en désignant par Δ le jacobien de la transformation (54)

$$\Delta(s,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u^1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u^1}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial u^2}{\partial s}, & \dfrac{\partial u^2}{\partial\theta}\end{vmatrix} \tag{59}$$

nous obtenons

$$\Delta(0,\ \theta)=0. \tag{60}$$

La transformation (54) possède donc des dérivées partielles du premier ordre continues, elle est cependant singulière au point P_0 car $(\Delta)_{P_0}=0$. Nous affirmons que, dans nos hypothèses (la surface V_2 est dans la représentation paramétrique u^i de classe C^3), on a pour les points du domaine

$$\begin{cases}0<s\leqslant\delta_0\\ 0\leqslant\theta<2\pi\end{cases}\qquad (0<\delta_0\leqslant\delta) \tag{61}$$

l'inégalité

$$\Delta(s,\theta)>0. \tag{62}$$

Pour le prouver posons

$$\begin{cases}\Omega_1(s,\theta)=s\eta_3(\theta)+r_1(s,\theta),\\ \Omega_2(s,\theta)=s\eta_4(\theta)+r_2(s,\theta).\end{cases} \tag{63}$$

Ω_1, Ω_2 possèdent relativement à s et θ des dérivées partielles continues du premier ordre et les fonctions $\eta_3(\theta)$, $\eta_4(\theta)$ sont analytiques. Il en résulte que les fonctions $r_i(s,\theta)\ (i=1,2)$ possèdent, dans le domaine (55), des dérivées partielles continues du premier ordre. Des relations (63) il s'ensuit que

$$\Delta(s,\theta)=\begin{vmatrix}\eta_3(\theta)+\dfrac{\partial r_1}{\partial s}, & \eta_1'(\theta)s+\dfrac{\partial r_1}{\partial\theta}\\ \eta_4(\theta)+\dfrac{\partial r_2}{\partial s}, & \eta_4'(\theta)s+\dfrac{\partial r_2}{\partial\theta}\end{vmatrix}. \tag{64}$$

Remarquons maintenant que de (56) et (58) il résulte qu'ont lieu les relations

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial s}\right)_{s=0}=0,\ \left(\frac{\partial r_i}{\partial\theta}\right)_{s=0}=0\qquad \text{pour}\quad i=1,2. \tag{65}$$

Nous affirmons que l'on a en plus

$$\operatorname*{Lim}_{s\to0}\frac{1}{s}\frac{\partial r_i}{\partial\theta}=0\qquad (i=1,2) \tag{66}$$

et ceci uniformément par rapport à la variable θ. Pour le démontrer observons que les fonctions (31) possèdent des dérivées partielles continues du second ordre

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s\, \partial \eta_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

En effet, en remarquant que les fonctions f_i possèdent relativement aux y_k des dérivées partielles continues du premier ordre et que les fonctions (31) possèdent relativement aux η_k des dérivées partielles continues du premier ordre nous en déduirons l'existence des dérivées (67) en vertu des relations

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \qquad (i = 1, 2). \tag{68}$$

Leur continuité découle des égalités

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s\, \partial \eta_j} = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)_{y_k = \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial \eta_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

De cela et de la régularité des fonctions $\eta_3(\theta)$, $\eta_4(\theta)$ il résulte que les dérivées

$$\frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial s\, \partial \theta} \qquad (i = 1, 2) \tag{70}$$

existent et qu'elles sont continues dans le domaine (55). Ceci entraîne, d'après un théorème connu de Schwarz, la conclusion que les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial \theta \partial s} \qquad (i = 1, 2) \tag{71}$$

existent et que l'on a

$$\frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial \theta \partial s} = \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial s \partial \theta} \qquad (i = 1, 2). \tag{72}$$

Ceci étant, les relations (63) assurent, en raison de la régularité des fonctions $\eta_3(\theta)$, $\eta_4(\theta)$, l'existence et l'égalité des dérivées

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial \theta \partial s} = \frac{\partial^2 r_i}{\partial s \partial \theta} \qquad (i = 1, 2). \tag{73}$$

Mais de la première relation (65) il résulte que

$$\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial s \partial \theta}\right)_{s=0} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{74}$$

et par suite aussi que

(75) $$\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial\theta\partial s}\right)_{s=1} = 0 \qquad (i=1,2).$$

La deuxième relation (65) donne, en vertu de la définition de la dérivée partielle, la conséquence

(76) $$\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial\theta\partial s}\right)_{s=0} = \lim_{s\to 0}\frac{\dfrac{\partial r_i}{\partial\theta}-\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial\theta}\right)_{s=0}}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial\theta}.$$

Des relations (75) et (76) résulte enfin (66). La convergence uniforme de (66) par rapport à θ résulte de l'égalité (76) et de la continuité des dérivées partielles (73). En effet, dans le cas contraire on pourrait, pour un i donné ($i=1$ ou $i=2$), indiquer deux suites convergentes

(77) $$s_n \to 0,\quad \theta_n \to \theta_0$$

telles que $s_n > 0$ et

(78) $$\left|\frac{1}{s_n}\frac{\partial r_i}{\partial\theta}\right|_{\substack{s=s_n\\ \theta=\theta_n}} \geqslant \varepsilon_0$$

où ε_0 est un nombre positif. De là on aurait

(79) $$\left|\frac{1}{s}\frac{\partial r_i}{\partial\theta}\right|_n = \frac{\left|\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial\theta}\right)_n-\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial\theta}\right)_{s=0}\right|}{s_n} = \left|\frac{\partial^2 r_i}{\partial\theta\partial s}\right|_{Q_n} \geqslant \varepsilon_0$$

où Q_n est un point de coordonnées $\theta=\theta_n$, $s=k_n s_n$ où $0<k_n<1$. Mais $Q_n \to P_0(s=0,\ \theta=\theta_0)$ et de l'inégalité (79) il résulterait la discontinuité de la dérivée $\dfrac{\partial^2 r_i}{\partial\theta\partial s}$. La difficulté qui pourrait se présenter au cas $\theta_0=2\pi$ sera immédiatement surmontée lorsqu'on remarquera que les fonctions $\Omega_i(s,\theta)$ et leurs dérivées (72) sont continues dans l'intervalle fermé $(0,2\pi)$ et qu'elles possèdent, relativement à θ, la période 2π.

Supposons maintenant que

(80) $$s>0.$$

On a

(81) $$\begin{aligned}\frac{\Delta(s,\theta)}{s} &= W_1(\theta)+\frac{\partial r_1}{\partial s}\eta_4'(\theta)-\frac{\partial r_2}{\partial s}\eta_3'(\theta)+\\ &+\frac{1}{s}\left\{\frac{\partial r_2}{\partial\theta}\left[\eta_3(\theta)+\frac{\partial r_1}{\partial s}\right]-\frac{\partial r_1}{\partial\theta}\left[\eta_4(\theta)+\frac{\partial r_2}{\partial s}\right]\right\},\end{aligned}$$

où $W_1(\theta)$ désigne le wronskien des fonctions $\eta_3(\theta)$, $\eta_4(\theta)$:

$$(82) \qquad W_1(\theta) = \begin{vmatrix} \eta_3(\theta), \eta_4(\theta) \\ \eta_3'(\theta), \eta_4'(\theta) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\nu - \mu^2}} \qquad \text{(cf. (44), (45), (46)).}$$

De la continuité des dérivées $\frac{\partial r_i}{\partial s}$ et de la première relation (65) on obtient, en remarquant que les fonctions $\eta_3(\theta)$, $\eta_4(\theta)$, $\eta_3'(\theta)$, $\eta_4'(\theta)$ sont bornées et en s'adressant aux relations (66) et (82), l'inégalité

$$(83) \qquad \lim_{s \to 0} \frac{\Delta}{s} = W_1(\theta) = \frac{1}{W} > 0.\ ^{19)}$$

De cela et de l'inégalité (80) résulte l'existence d'un $\delta_0 > 0$ pour lequel subsiste l'inégalité (62) dans le domaine (61). Au voisinage du point P_0 (P_0 excepté!) la transformation (54) est donc de classe C^1. Le jacobien Δ étant en plus positif nous voyons que *l'orientation de la surface au moyen du système des coordonnées* (s, θ) *(et non pas* (θ, s)*!) coïncide avec celle qui correspond au système des coordonnées* (u^1, u^2). Remarquons que dans nos hypothèses les dérivées partielles

$$(84) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial s \partial \theta}, \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial \theta \partial s} \qquad (i = 1, 2)$$

existent mais nous n'avons pas la sûreté que les dérivées

$$(85) \qquad \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial \theta^2}\ ^{20)} \qquad (i = 1, 2)$$

existent et nous ne pouvons donc pas affirmer que la transformation (54) est de classe C^2. En substituant les relations (54) dans les équations (1) nous obtenons les équations

$$(86) \qquad x^\alpha = x^\alpha[\Omega_1(s, \theta)\ \Omega_2(s, \theta)] = x^\alpha(s, \theta) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

c.-à-d. les équations paramétriques de la surface V_2 dans les *coordonnées polaires du point* P_0. La matrice

---

[19]) Une formule analogue dans la géométrie de Finsler, mais sous des hypothèses plus restreintes, a été obtenue par MM. L. Berwald — P. Funk, Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung, Lotos — Prag 67/68 (1919/20) p. 20.

[20]) Il est probable que les dérivés (85) existent. Si c'était le cas, le théorème que nous énonçons ci-dessous serait susceptible d'un énoncé plus précis.

$$(87) \qquad \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta} \right\| \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

est (le point P_0 excepté) de l'ordre 2 dans le domaine (61). On le vérifie facilement. Du raisonnement précédent résulte le théorème suivant.

Si une surface V_2 est, dans une représentation paramétrique, de classe C^3 alors elle est, dans la représentation paramétrique (s, θ) de classe C^1 c.-à-d. elle possède un ordre de régularité inférieur à celui de la représentation (u^1, u^2) de deux unités.

§ 9. En désignant par $\bar{g}_{ik}$ les composantes du tenseur métrique dans le système des coordonnées polaires (s, θ) nous démontrerons que l'on a

$$(88) \qquad \bar{g}_{11} = 1, \quad \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0.$$

En d'autres termes, le carré de la longueur d'arc dS^2 s'exprime dans les coordonnées polaires par la formule

$$(89) \qquad dS^2 = ds^2 + G(s, \theta) d\theta^2 \qquad (G = \bar{g}_{22}).$$

Bien que cette formule figure dans chaque cours de la géométrie différentielle, sa démonstration donnée dans les manuels que je connais renferme ou bien de considérables inexactitudes ou bien, tant qu'elle peut être rigoureusement complétée, exige de hypothèses sur la régularité de la surface allant plus loin que les nôtres.

Afin d'établir les relations (88) nous partons des formules classiques sur la transformation des composantes du tenseur g_{ik}. Ces formules peuvent être appliquées dans notre cas, car la transformation $(u^1, u^2) \to (s, \theta)$ est de classe C^1 au voisinage du point P_0[21]. Nous avons donc

$$(90) \qquad \bar{g}_{ik} = g_{lm} A^l_i A^m_k$$

où les A^l_i constituent les éléments de la matrice formée par les dérivées partielles suivantes

$$(91) \qquad \begin{Vmatrix} A^1_1, & A^1_2 \\ A^2_1, & A^2_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u^1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial s}, & \dfrac{\partial u^2}{\partial \theta} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} \end{Vmatrix}.$$

---

[21]) Cf. St. Gołąb, Über die Möglichkeit einer absoluten Auszeichnung der der Gruppe von Koordinatensystemen in verschiedenen Räumen, Verh. des Intern. Math. Kongr. Zürich 1932. p. 183–184.

On aura en particulier

$$(92)\quad \begin{cases} \bar{g}_{11} = g_{ik}\dfrac{\partial \Omega_i}{\partial s}\dfrac{\partial \Omega_k}{\partial s} \\ \bar{g}_{12} = g_{11}\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial s}\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} + g_{12}\left[\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial s}\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial s}\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \theta}\right] + g_{22}\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial s}\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Adressons-nous maintenant à la relation (42) de laquelle il résulte en particulier que

$$(93)\qquad g_{ik}\frac{\partial \Omega_i}{\partial s}\frac{\partial \Omega_k}{\partial s} = 1,$$

ce qui rapproché aux relations (92) conduit à la première relation (88). Pour démontrer la deuxième relation (88) ($\bar{g}_{12} = 0$) envisageons deux champs vectoriels suivants

$$(94)\qquad w^k = \frac{\partial \Omega_k}{\partial s},\quad t^k = \frac{\partial \Omega_k}{\partial \theta}$$

et déterminons l'invariant φ au moyen de l'égalité

$$(95)\qquad \varphi = g_{ik} w^i t^k.$$

En désignant par D le symbole de la dérivation covariante, nous écrirons $\underset{s}{D}$ ou $\underset{\theta}{D}$ pour désigner la dérivation covariante le long des courbes $\theta = \text{Const.}$ ou $s = \text{Const.}$ Mais, comme on le sait bien,

$$(96)\qquad \underset{s}{D} g_{ik} = 0,\quad \underset{\theta}{D} g_{ik} = 0.$$

En appliquant la dérivation covariante à la relation (95) [22] nous obtenons

$$(97)\qquad \underset{s}{D}\varphi = g_{ik}\{t^k \underset{s}{D} w^i + w^i \underset{s}{D} t^k\}.$$

Mais nous avons

$$(98)\qquad \underset{s}{D} w^i = 0$$

parce que la courbe $\theta = \text{Const}$ est une géodésique, le paramètre s représente son arc et w^i est un vecteur tangent à la géodésique [23]).
Appliquons à la relation

$$(99)\qquad g_{ik} w^i w^k = 1$$

---

[22]) C'est possible car, en vertu de nos hypothèses, les vecteurs $\underset{s}{D} w^i$, $\underset{\theta}{D} w^i$, $\underset{s}{D} t^i$, $\underset{\theta}{D} t^i$ existent, parce que leur existence n'exige que l'existence des dérivées partielles (84).

[23]) Cf. p. ex. J. A. Schouten, l. c.[9]).

(cf. (93) et (94)) l'opération $\underset{\theta}{D}$. Nous obtiendrons

(100) $$g_{ik} w^i \underset{\theta}{D} w^k = 0.$$

Mais de la définition des symboles $\underset{s}{D}$ et $\underset{\theta}{D}$ il résulte que

(101) $$\underset{s}{D} t^k = \frac{\partial^2 \Omega_k}{\partial \theta \partial s} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \theta} \frac{\partial \Omega_j}{\partial s}$$

et

(102) $$\underset{\theta}{D} w^k = \frac{\partial^2 \Omega_k}{\partial s \partial \theta} + \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \Omega_i}{\partial s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \theta}.$$

Des relations (101) et (102) il résulte en vertu de (72) et de l'identité bien connue $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}$ que

(103) $$\underset{s}{D} t^k = \underset{\theta}{D} w^k$$

ce qui avec (100) donne

(104) $$g_{ik} w^i \underset{s}{D} t^k = 0.$$

Des relations (104), (98), (97) il s'ensuit finalement que

(105) $$\underset{s}{D} \varphi = 0,$$

ce qui conduit à la conclusion que, le long de la ligne $\theta =$ Const, on aura $\varphi =$ Const donc:

(106) $$\varphi = \varphi(\theta).$$

En considérant θ comme fixe, supposons que s tend vers zéro. En vertu des relations (58) et de la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial \Omega_k}{\partial s}, \frac{\partial \Omega_k}{\partial \theta}$ nous aurons alors $t^k \to 0$ et par suite

(107) $$\lim_{s \to 0} \varphi(\theta) = 0,$$

d'où il résulte immédiatement que

(108) $$\varphi \equiv 0.$$

Remarquons cependant que d'autre part

(109) $$\varphi \overset{*}{=} \bar{g}_{12}$$ [24]).

La deuxième relation (88) se trouve ainsi démontrée.

---

[24]) Le signe $\overset{*}{=}$ signifie (d'après Schouten) que l'égalité n'a pas un caractère covariant. Elle ne subsiste pas dans les autres systèmes des coordonnées. C'est manifeste parce que la composante g_{12} du tenseur g_{ik} n'est pas un scalaire.

Nous démontrerons encore que, dans nos hypothèses, a lieu la relation

$$\lim_{s \to 0} \frac{G(s, \theta)}{s^2} = 1. \tag{110}$$

En effet, de (90) on obtient:

$$G(s, \theta) = \bar{g}_{22} = g_{11} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + g_{22} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta}\right)^2. \tag{111}$$

En vertu de (63) nous aurons donc

$$\begin{aligned} \frac{G(s,\theta)}{s^2} = g_{11} \left[\eta_3'(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right]^2 + 2 g_{12} \left[\eta_3'(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right] \cdot \\ \cdot \left[\eta_4'(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right] + g_{22} \left[\eta_4'(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right]^2. \end{aligned} \tag{112}$$

Les fonctions g_{ik} étant continues, on aura

$$g_{11} \to \lambda, \quad g_{12} \to \mu, \quad g_{22} \to \nu \qquad \text{quand } s \to 0. \tag{113}$$

Nous aurons d'après (66):

$$\lim_{s \to 0} \frac{G(s, \theta)}{s^2} = \lambda [\eta_3'(\theta)]^2 + 2 \mu \eta_3'(\theta) \eta_4'(\theta) + \nu [\eta_4'(\theta)]^2. \tag{114}$$

Un calcul facile nous donne en vertu de (43), (44), (45). (46) que l'on a

$$\lambda [\eta_3'(\theta)]^2 + 2 \mu \eta_3'(\theta) \eta_4'(\theta) + \nu [\eta_4'(\theta)]^2 \equiv 1 \tag{115}$$

et la relation (110) se trove ainsi établie.

§ 10. Supposons maintenant que la surface V_2 soit, dans la représentation paramétrique u^i, de classe $C^{n+2} (n \geqslant 1)$. Les symboles de Christoffel $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ sont alors de classe C^n et de la relation (30) il résulte que les deuxièmes membres des équations différentielles (29) sont de classe C^n par rapport aux variables $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$. Ces deuxièmes membres ne dépendent pas de s, ils sont donc, relativement à s, de classe de régularité arbitrairement élevée. En raison d'un théorème connu [25]), les deuxièmes membres des relations (31) possèdent relativement aux variables $s, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_3$ des dérivées partielles d'ordre n continues. En tenant compte du rang de régularité des fonctions (44), nous voyons que les deuxièmes membres des

---

[25]) Voir E. Kamke, l. c. [15]) p. 166.

relations (54) possèdent des dérivées partielles continues d'ordre n. Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Si la surface V_2 est, dans une représentation paramétrique, de classe C^{n+2} elle est, dans la représentation polaire (s, θ) de classe C^n.

En s'appuyant sur le théorème précedent, on établira facilement les égalités

$$(116)\quad \lim_{s\to 0}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial s}=1,\quad \lim_{s\to 0}\frac{\partial^2\sqrt{g}}{\partial s^2}=0,\quad \lim_{s\to 0}\frac{\partial^3\sqrt{g}}{\partial s^3}=-K_0$$ [26])

lorsque la surface V_2 est, dans la représentation paramétrique u^i, respectivement de classe C^4, C^5, C^6. Dans ces formules K_0 désigne la courbure de Gauss de la surface V_2 au point P_0.

Remarquons enfin qu'il n'est pas possible d'écrire les relations (116) sous la forme $\left(\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial s}\right)_{s=0}=1$ etc. car il n'est pas admissible de parler des composantes des objets géométriques localisés au point P_0, lorsqu'on rapporte la surface au système des coordonnées polaires (s, θ).

---

[26]) Voir p. ex. L. Bianchi.

Sur une application de la notion d'ordre d'une trajectoire par rapport à une courbe.

Par

S. K. Zaremba (Wilno).

Voici une application trés-simple de la notion d'ordre d'une trajectoire fermée par rapport à une courbe fermée, notion dont je me suis servi dans ma note „Sur la variation de la tangente à une courbe fermée simple de Jordan", insérée dans ce volume (p. 55 et 56). Nous allons considérer deux courbes fermées simples de Jordan, soit C et C', subissant des déformations continues, pendant lesquelles elles restent toujours rapportées à un même paramètre, de façon qu'il existe entre leurs points une correspondence continue et biunivoque. Nous aurons alors les deux théorèmes suivants, relatifs aux déformations considérées.

Théorème 1. Si au début de la déformation l'une des courbes C et C' est contenue à l'intérieur de l'autre et à la fin chacune de ces courbes se trouve à l'extérieur de l'autre, alors au cours de cette déformation il arrivera au moins une fois que quelque point de la courbe C coïncidera avec le point correspondant de la courbe C'.

Théorème 2. Supposons que le paramètre commun détermine sur les courbes C et C' deux orientations différentes. Supposons de plus qu'au début de la déformation la courbe C' se trouve à l'intérieur de la courbe C et qu'à la fin, au contraire, la courbe C' contienne dans son intérieur la courbe C. Alors au cours de la déformation au moins une fois un point de la courbe C coïncidera avec le point correspondant de la courbe C'.

Les démonstrations de ces théorèmes reposent sur les remarques suivantes:

1^0 L'ordre de la courbe C' par rapport à la courbe C est identiquement égal à l'ordre de la courbe C par rapport à la courbe C', de sorte qu'il peut être question de l'ordre mutuel de deux courbes fermées rapportées à un même paramètre.

2^0 L'ordre mutuel de deux courbes dont chacune est située à l'extérieur de l'autre est nul.

3^0 L'ordre mutuel de deux courbes fermées simples de Jordan dont l'une est située à l'intérieur de l'autre, est égal à $+1$ si la courbe extérieure est orientée positivement et à -1 dans le cas contraire.

4^0 Si les courbes C et C' varient de façon que les points correspondants ne coïncident jammais, leur ordre mutuel varie d'une façon continue et, par suite, est constant.

Comptes-rendus et analyses.

Tableau du XX^e^ siècle. 1900—1933. II. *Les Sciences*, par Jean Rostand, A. Boutaric et P. Sergescu. Chez Denoël et Steel. Paris.

Le but de cet important ouvrage est de présenter un aperçu général sur la part si considérable due aux savants francais dans les 33 premières années du vingtième siècle. L'ouvrage se compose de trois parties. L'auteur de la première partie consacrée aux sciences mathématiques est M. Pierre Sergescu, professeur à l'Université de Cluj; celui de la seconde, relative aux sciences biologiques, est M. Jean Rostand; enfin c'est M. Augustin Boutaric, professeur à l'Université de Dijon qui a rédigé la troisième partie laquelle traite des sciences physico-chimiques.

Tout l'ouvrage est très intéressant et contient de précieuses indications bibliographiques.

Dr. Kazimierz Bartel, Professor an der technischen Hochschule in Lemberg. *Malerische Perspektive. Grundsätze, geschichtlicher Überblick, Ästhetik. Band 1,* Deutsch herausgegeben von Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der technischen Hochschule Danzig—Langfuhr. Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin. (Ouvrage traduit de l'édition polonaise).

Cet ouvrage est écrit avec une grande compétence et il se recommande par la clarté de l'exposition.

Stanisław Saks. *Théorie de l'intégrale.* Avec une note de M. Stefan Banach, professeur à l'Université de Lwów. Z subwencji Funduszu Kultury Narodowej. Warszawa, 1933.

On trouvera dans cet ouvrage une exposition rigoureuse et claire des recherches modernes sur la notion d'intégrale. Tout l'ouvrage est très intéressant et contient de précieuses indications bibliographiques.

Voici une liste de quelques ouvrages nouveaux parus en langue polonaise.

Dr. A. Hoborski, profesor Akademji Górniczej w Krakowie. *Teorja krzywych*. (Théorie des courbes). Deux volumes (Bibljoteczka Kółka Mat.-Fiz. U. U. J.).

Dr. Stefan Banach, profesor Uniwersytetu we Lwowie. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. (Calcul différientiel et intégral). Deux volumes (Wydawnictwo Zakładu Narodowego imienia Ossolińskich).

Dr. Witold Wilkosz, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. *Teorja mnogości punktowych* (Théorie des ensembles de points). (Bibljoteczka Kółka Mat.-Fiz. U. U. J.).

Dr. Antoni Przeborski, profesor Uniwersytetu Warszawskiego. *Wykłady mechaniki teoretycznej*, t. I (Leçons de Mécanique rationnelle). (Wydawnictwo Kasy imienia Mianowskiego).

Dr. S. Zaremba, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. *Zarys Mechaniki teoretycznej* (Cours de Mécanique rationnelle). (Nakładem Polskiej Akademji Umiejętności). *S. Z.*

Comptes rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

à Cracovie pour les années 1932 et 1933.

20. II. 1932. A. Bielecki. „Sur un système particulier d'équations différentielles". L'auteur construit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

jouissant des propriétés suivantes: 1° P, Q, R possèdent dans l'espace tout entier des dérivées partielles continues et remplissent partout l'inégalité $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$, 2° ce système admet, comme certaines intégrales, des courbes fermées de Jordan *sur lesquelles se présentent des noeuds* (problème de M. Ważewski). La famille des intégrales de cette sorte est partout dense dans l'espace. M. Ważewski remarque que ce système n'admet pas deux intégrales premières indépendentes, valables à l'intérieur d'une certaine sphère.

21. V. 1932. Deux communications indépendentes de M. W. Urbański et M. Ważewski sur les intégrales stables d'un système d'équations différentielles (Pour la communication de M. Ważewski cf. C. R. Mai, 1932).

28. V. 1932. W. Wilkosz Sur quelques points de la théorie

des déformations (à paraître dans les Comptes Rendus du Congrès roumain à Turnu Severin). T. Ważewski. Quelques remarques critiques sur la conférence précédente de M. Urbański.

18. IV et 25. VI. 1932. W. Wilkosz. Sur un théorème fondamental de la théorie des déformations (cf. ce volume p. 16).

15. X. 1932. W. Wilkosz. Sur les jacobiens de Fubini. Dans le cas d'une homéomorphie (ou d'une transformation continue à variation bornée) le jacobien de Fubini (Atti di Torino 1915) est continu lorsqu'on suppose qu'il existe en tout point d'un ensemble ouvert. On peut donc supprimer les hypothèses accessoires de Fubini et les résultats du travail cité se ramènent aux propriétés élémentaires des fonctions continues. Ce théorème n'est pas vrai pour l'espace à une dimension.

22. X. 1932. A. Rosenblatt. Sur l'unicité des intégrales des équations aux dérivées partielles (suivi d'une Note dans les C. R.).

10. XII. 1932. T. Ważewski. Sur les transformations au jacobien borné. L'auteur ramène un cas particulier d'un théorème de M. Hadamard sur l'existence d'une transformation inverse (dans l'espace tout entier) à un théorème sur les systèmes d'équations différentielles. Cette méthode convenablement modifiée donne une démonstration bien simple du théorème de M. Hadamard dans le cas général.

14. I, 11. II. et 18. II. 1933. A. Rosenblatt. Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique. (Cf. C. R. 6. II. 1933).

11. II. 1933. S. Turski. Sur la décomposition de nombres entiers en sommes de carrés de nombres impairs (cf. Bull. d. l. Soc. R. d. Sciences de Liège, 16. III. 1933).

24, IV. 1933. T. Ważewski communique un résultat de M^lle^ J. Perausówna sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles linéaire (cf. ce volume p. 1).

I. V. 1933. T. Ważewski, Sur l'encadrement des intégrales du système des équations différentielles ordinaires (v. ce volume p. 8. II.) avec une application aux équations aux dérivées partielles (v. ce volume p. 6).

8. V. 1933. W. Wilkosz. Sur les fondements de la théorie des tenseurs. Définition de l'espace tensoriel à *n* dimensions appuyée sur la notion de l'espace topologique de Moore. L'auteur définit les tenseur (en particulier les vecteurs covariants et contravariants) au moyen des familles des courbes et des surfaces.

15. V. 1933. W. Wilkosz. Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre. Le premier membre de l'équation du type non parabolique $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ étant analytique, deux intégrales ayant en commun une caractéristique C d'ordre 0 et un élément d'ordre 2 coïncident le long de cette caractéristique dans tous les éléments d'ordre 1 et 2.

12. VI. 1933. W. Wilkosz. Sur les démonstrations de la non-contradiction dans les théories déductives. Une analyse des méthodes récentes de M. Hilbert concernant ce sujet.

16. X. 1933. W. Wilkosz. Sur le conventionalisme dans l'arithmétique. L'auteur construit une classe d'arithmétiques contradictoires avec l'arithmétique classique et compatibles pratiquement avec les expériences servant à vérifier l'arithmétique classique qui présente un cas asymptotique de ces arithmétiques.

6. XI. 1933. A. Rosenblatt. Sur une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre non linéaire (suivi d'une Note dans les C. R.).

13. XI. 1933. T. Ważewski. Sur l'unicité et la limitation des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, novembre 1933).

20. XI. 1933. W. Wilkosz. Théorème de Green dans le calcul absolu. Une méthode nouvelle très-générale se rapportant au théorème flux-divergence.

27. XI. 1933. A. Rosenblatt. Sur une équation aux dérivées partielles du 4-ème ordre (Une Note dans les C. R.).

4. XII. 1933. W. Wilkosz. Sur quelques fonctions numériques en rapport avec théorème de Vachy. En relation avec sa conférence précédente, l'auteur démontre, dans des conditions très-générales. le théorème fondamental de l'éléctrodynamique, dit théorème de Vachy.

Comptes rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Lwów.

---

16. I. 32. T. Banachiewicz: Über gewisse Fragen der theoretischen Astronomie.

W. Orlicz: Zur Theorie der Orthogonalreihen. Herr Orlicz beweist eine Reihe von Sätzen über allgemeine Orthogonalreihen.

U. a. wird bewiesen dass die Carlemansche Singularität in allg. Orthogonalreihen vorkommt. In jedem Orthogonalsystem gibt es eine fast überall divergente Reihe, deren Koeffizienten nach Null streben.

23. I. 32. K. Kuratowski: Zur Dimensionstheorie. Es werden Anwendungen der Funktionalräume auf die Dimensionstheorie besprochen. Die Heranziehung dieser Räume gestattet eine wesentliche Vereinfachung der Beweise (Vgl. Fund. Math. XVIII, S. 285—293).

H. Steinhaus. Zur sogenannten Quasi-ergoden Hypothese. Prelegent weist auf zwei Lücken in der Arbeit von Rosenthal in den Ann. d. Phys. in welcher der Verfasser vermittels der Quasiergodenhypothese die Gleichheit von Zeit — und Raummittel zu beweisen glaubt. Eine dieser Lücken wurde vom Prel.,die andere vom H. Melamid bemerkt.

30. I. 32. S. Banach: Zum Dimensionsbegriffe in Funktionalräumen. Es gibt ein Kontinuum von separablen Räumen vom Typus (B), die alle untereinander in Bezug auf die lineare Dimension unvergleichbar sind. Es werden folgende Probleme gestellt: Gibt es in jedem unendlichdimensionalen Raum von Typus (B) eine eigentliche lineare Teilmenge von gleicher linearen Dimension? Es sei E ein unendlich-dimensionaler Raum vom Typus (B), I die Zahlgerade; ist dann $\dim_l E \times I = \dim_l E$? Gibt es überhaupt gleichdimensionale, nichtisomorphe Räume vom Typus (B)? (Vgl. S. Banach. Théorie des Opérations linéaires, Varsovie 1932, Ch. XII).

13. II. 32. K. Kuratowski und S. Ulam: Über eine Klasse von stetigen Abbildungen (Vgl. Fund. Math. XX, p. 244—253).

S. Ulam: Über die Invarianz eines Schnittes des euklidischen Raumes bei kleinen Transformationen (Vgl. K. Borsuk und S. Ulam, Math. Annalen B. 108, S. 312—319).

28. II. 32. S. Banach: Über die sogenannte Quasi-ergodenhypothese. Es sei A ein Raum in welchem eine abzählbar additive Maßfunktion definiert ist, T eine maßtreue Abbildung von A auf sich selbst, $f(p)$ eine reelle, meßbare, in A erklärte Funktion. Dann gilt: die Folge $f(T_n(p))$, wo T_n die n-te Iteration von T bedeutet, ist fast überall C_1 — summierbar. Als Folgerung ergeben sich die Birkhoffschen Sätze im Zusammenhange mit der quasi-ergodischen Hypothese.

H. Steinhaus. Eine neue Methode der praktischen Feldberechnung.

12. III. 32. W. Sierpiński: Über einige Sätze die mit der Kontinuumhypothese äquivalent sind.

K. Kuratowski: Über ein geometrisches Problem, das im Zusammenhange mit dem Begriffe der Transitivität von Birkhoff steht (Vgl. Fund. Math. XIX, S. 252—257).

16. III. 32. S. Kempisty: Über quasi-stetige Funktionen von zwei abstrakten Veränderlichen.

26. III. 32. B. Knaster: Über Zerlegungen der Kugeloberfläche.

W. Orlicz: Zur Theorie der Orthogonalreihen.

14. V. 32. Hetper: Über die Anwendungen der semantischen Methode auf die Arithmetik.

S. Mazur: Über konvexe Mengen in linearen, normierten Räumen (Vgl. Studia Math. IV. S. 70–84).

18. VI. 32. E. Żyliński: Über die inversen Funktionen.

S. Ruziewicz: Zur Theorie der reellen Funktionen. Prel. befasst sich mit dem Probleme der Darstellung einer Funktion von mehreren Veränderlichen als Funktion einer Summe von Funktionen von einer Veränderlichen (Vgl. Mathematica, 1933).

S. Banach: Über lakunäre Orthogonalreihen (Vgl. Bull. Ac. Pol., 1933).

2. VII. 32. S. Banach: Über die schwache Konvergenz (Vgl. S. Banach Théorie des Opérations linéaires, Varsovie 1932, Annexe).

S. Łomnicki und S. Ulam: Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es wird eine Maßtheorie für Produkträume (endliche oder unendliche Produkte von Räumen, in denen ein Maß als gegeben vorausgesetzt wird) und eine Interpretation in der Wahrscheinlichkeitstheorie der unabhängigen Ereignisse angegeben. Dabei werden neue Formulierungen der sogenannten Gesetze der grossen Zahlen gegeben.

1. X. 32. K. Kuratowski: Bericht über den Internationalen Mathematikerkongress im Zürich.

S. Kaczmarz: Bericht über eine Studienreise nach England.

8. X. 32. H. Steinhaus: Über eine Aufgabe aus der Theorie des Wettbewerbes im Handel.

Prelegent löst eine Aufgabe des Herrn L. Berson, betreffend den Einfluß der Preise einer Ware auf die Teilung des Marktes

zwischen konkurierende Produzenten auf Grund einer plausiblen Theorie des subjektiven Wertes und der Gausschen Hypothese. Es werden genauer die Fälle von zwei und drei Konkurrenten besprochen.

S. Kaczmarz: Über eine Klasse von Fourierschen Reihen (Vgl. Journal of the London Math. Soc. B. 8, S. 35—45).

12. XI. 32. S. Mazur und S. Banach: Über einige Eigenschaften des Raumes der Funktionen von endlicher Variation (Vgl. Studia Math. IV: „Zur Theorie der linearen Dimension", S. 100—112).

S. Mazur und W. Orlicz: Über lineare Limitierungsverfahren (Vgl. C. R. de l'Ac. des Sc. Paris, T. 195).

15. XI. 32. F. Čech: Über unikohärente Kontinua.

Prel. bespricht das Verhältniss der kombinatorischen und der mengentheoretischen Methode in der Topologie. Es wird eine kombinatorische Definition der Unikohärenz angeben und deren Äquivalenz mit der mengentheoretischen Definition im Bereiche der lokal-zusammenhängender Räume bewiesen.

19. XI. 32. W. Sierpiński: Über die Baire-schen Funktionen (Vgl. Fund. Math. XX, S. 173—176).

H. Auerbach: Über die Wahrscheinlichkeit des Fehlers einer Summe von Dezimalzahlen (Vgl. Zeitschrift für ang. Math. u. Mech., 1933).

S. Mazur: Über die schwache Konvergenz und einen Satz von Birkhoff. Es sei E ein Raum vom Typus B von der Eigenschaft, daß jede beschränkte Punktfolge eine gegen ein Element des Raumes schwachkonvergente Teilfolge enthält. $U(x)$ sei eine lineare Abbildung von E in sich selbst, von der Norm 1. Dann ist die Iterationsfolge $\{U^n(x)\}$ in jedem Punte C_1 — summierbar. Dieser Satz bildet gewissermaßen eine Verallgemeinerung des ergodischen Satzes von Birkhoff.

J. Schreier: Über Schnitte von geschlossenen Flächen. Es wird die folgende Vermutung des Herrn S. Ulam bewiesen: bildet jeder ebene Schnitt einer geschlossenen Fläche eine geschlossene Kurve, so ist die Fläche konvex.

7. XII. 32. T. Banachiewicz: Über einige Fragen der theoretischen Astronomie.

Kozieł: Über die Ableitung der Gibbsschen Formeln.

S. Banach: Über n-lineare symmetrische Formen. Es sei $U(x)$ ein im euklidischen Raume R erklärtes reelles homogenes Polynom vom Grade u, $U(x_1 \dots x_n)$ die n-lineare symmetrische Form

aus welcher $U(x)$ durch Gleichsetzen der Variablen entsteht. Wenn $\|x\|$ die euklidische Norm bezeichnet, so ist.:

$$\operatorname*{Max}_{\|x\|\leq 1} |U(x)| = \operatorname*{Max}_{\|x_1\|,\ldots,\|x_n\|\leq 1} |U(x_1,\ldots,x_n)|$$

Der Satz behält seine Gültigkeit, wenn R den Hilbert'schen Raum bedeutet Es werden Anwendungen in der Theorie der nicht linearen Integralgleichungen angegeben.

H. Auerbach: Über beschränkte Gruppen von linearen Substitutionen (Vgl. C R. de l'Ac. des Sc. Paris, T. 195, p. 1367).

17. XII. 32. S. Mazur und W. Orlicz: Über lineare Limitierungsverfahren II. U. a. wird der folgende Satz angegeben: Damit ein permanentes Limitierungsverfahren A, welches gewisse divergente Folgen limitiert, auch gewisse beschränkte divergente Folgen limitiere, ist notwendig und hinreichend: es gibt eine divergente A-limitierbare Folge, die mit jedem von A nichtschwächerem Limitierungsverfahren zu derselben Grenze limitierbar ist.

W. Nikliborc und W. Stożek: Zur Potentialtheorie (Vgl. Fund. Math. XXII, S. 109—133).

S. Kaczmarz: Über die Multiplikatoren (Vgl. Studia Math. IV, S. 21—27).

30. XII. 32. S. Saks: Über den Satz von Vitali.

Derselbe: Bericht über eine Studienreise nach den Vereinigten Staaten.

7. I. 33. K. Menger: Über die Theorie der metrischen Räume.

K. Zarankiewicz: Über Mengen, die den Raum lokal zerschneiden.—Es können im Raume nur abzählbarviele solche untereinander elementfremde Mengen existieren.

K. Kuratowski: Über stetige Abbildungen von abgeschlossenen Mengen in Komplexe (Vgl. Fund. Math. XX, S. 191—197).

14. I. 33. S. Kaczmarz: Über Kurven konstanter Breite. Es wird ein einfacher Beweis des Satzes angegeben, wonach diese Kurven durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß eine Hinzusetzung eines beliebigen Punktes den Durchmesser der Menge vergrößert.

S. Banach: Literaturbericht.

S. Mazur: Literaturbericht.

28. I. 33. L. Kuratowski: Über die stetigen Abbildungen des Kreises auf die Kugeloberfläche (Vgl. Fund. Math. XX, S. 206—214).

S. B a n a c h: Über den Satz von Green (Vgl. Bull. Ac. Pol. Feb. 1933).

S. U l a m: Über stetige Abbildungen von Flächen.

4. II. 33. S. B a n a c h: Zur Haarschen Maßtheorie (Vgl. S. Saks, Théorie de l'Intégrale, Varsovie 1933, Note de M. Banach).

S. M a z u r: Literaturbericht.

25. II. 33. S. R u z i e w i c z: Zur Theorie der reellen Funktionen.

K. K u r a t o w s k i: Über einen Satz des Herrn B a n a c h (Vgl. Studia Math. IV, S. 38—41).

W. N i k l i b o r c und W. S t o ż e k: Zur Potentialtheorie (Vgl. Fund. Math. XXII, S. 109—133).

18. III. 33 W. S i e r p i ń s k i: Über die Superposition von Funktionen. Es werden mehrere Sätze des Prel. und Herrn A. L i n d e n b a u m, über die Superpositionen von Baire-schen Funktionen angegeben.

Z. Ł o m n i c k i und S. U l a m: Über die Gesetze der großen Zahlen. Im Anschluß an die Maßtheorie in den (unendlichen) Produkträumen werden u. a. folgende Sätze bewiesen:

Es sei E_n eine Folge von beliebigen „zufälligen Variablen", d. h. Zahlen-Räumen in welchen eine Maß-funktion definiert ist. (Dabei wird die math. Erwartung in jedem E_n auf Null normiert).

Im Produktraume $\mathop{\mathfrak{P}}\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ hat die Menge der Folgen, die nach Null C_1 — summierbar sind entweder das Maß 0 oder 1. D. h. es gilt entweder das „Gesetz der großen Zahlen" oder sein Gegenteil.

Wenn E_n stets $= E$ vorausgesetzt wird, so hat im Raume $\mathop{\mathfrak{P}}\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ die Menge der Folgen, die in E g l e i c h m ä ß i g v e r t e i l t sind, das Maß 1.

1. IV. 33. S. B a n a c h und S. M a z u r: 1. Über mehrwertige Funktionen. Es seien A und B zwei metrische Räume. Von A setzen wir folgendes voraus: je zwei Punkte von A sind bogenverknüpfbar. Je zwei einfache Bogen in A können ineinander auf stetige Weise deformiert werden. Sei f eine k-wertige stetige in A erklärte Funktion mit Werten aus B. f besteht dann aus k stetigen Zweigen, die auf jeder Komponente von A eindeutig (bis auf Ordnung) bestimmt sind.

2. A sei ein zusammenhängender Raum, B erfülle die in 1 von A gemachten Voraussetzungen; wenn f eine stetige Abbildung

von A auf B ist, die im kleinen ein- eindeutig ist und dabei die Urbildmengen kompakter Mengen kompakt sind, so ist f ein Homöomorphismus von A und B.

Z. Birnbaum und J. Schreier: Eine Bemerkung zum Gesetz der großen Zahlen (Vgl. Studia Math. IV, S. 85—90).

S. Mazur: Literaturbericht.

28. IV. 33. W. Sierpiński: a) Über eine Zerlegung der Ebene (Vgl. Fund. Math. XXI, S. 39—43).

b) Beispiel einer abzählbaren Menge, welche nicht effektiv abzählbar ist (Fund. Math. XXI, S. 46—48).

c) Über ein Problem des Herrn K. Kuratowski (Fund. Math. XXI, S. 66—73).

K. Kuratowski: Über ein Problem der Effektivität.

20. V. 33. S. Banach und K. Kuratowski: Über lineare projektive Mengen (Vgl. Studia Math. IV, S. 95—100).

H. Auerbach: Über beschränkte, lineare Gruppen (Vgl. Studia Math. IV, S. 113—128).

S. Mazur: a) Über das schwache Differential (Vgl. Studia Math. IV, S. 70—84).

b) Über das Differential und schwache Konvergenz in den Räumen $L^{(p)}$ (Vgl. Studia Math. IV, S. 128—133).

J. Schreier und S. Ulam: Über die Gruppe der homöomorphen Abbildungen der euklidischen Kugel (Vgl. Fund. Math. XXII).

17. VI. 33. K. Borsuk: Über das Problem der topologischen Charakterisierung der euklidischen Sphären.

J. Schreier und S. Ulam: Über die Gruppe der Permutationen der Reihe der natürlichen Zahlen (Vgl. Studia Math. IV, S. 134—142).

24. VI. 33. H. Steinhaus: Literaturbericht.

4. X. 33. J. Schauder: Bericht über eine Studienreise nach Deutschland und Frankreich.

17. X. 33. J. Schauder: Topologie und Funktionalgleichungen (Vgl. eine demnächst in den Annales de l'École Normale Supérieure erscheinende Arbeit von J. Leray und J. Schauder).

S. Mazur und W. Orlicz: Über eine Klasse von metrischen, linearen Räumen I (Vgl. S. Mazur und W. Orlicz: Über Folgen linearer Operationen, Studia Math. IV, S. 152—157, sowie eine voraussichtlich in Studia Math. V erscheinende Arbeit derselben Verfasser).

21. X. 33. H. Steinhaus: Literaturbericht.

S. Banach: Über analytische Funktionale (erscheint in Studia Math. V).

J. Schauder: Über lineare partielle Differentalgleichungen vom elliptischen Typus (Vgl. Mathematische Zeitschrift, 38).

28. X. 33. S. Mazur und S. Orlicz: Über eine Klasse von metrischen, linearen Räumen II (Erscheint in Studia Math. V).

M. Kac: Über eine trigonometrische Reihe. (Journ. Lond. Math. Soc. April 1934).

2. XII. 33. H. Steinhaus: a) Bemerkung über lakunäre Reihen. b) Über vollständige Orthogonalsysteme (Vgl. Studia Math. IV, S. 142—146).

H. Auerbach: Über beschränkte lineare Gruppen (Vgl. Studia Math. IV, S. 158—166).

16. XII. 33. K. Kuratowski: Über Borelsche Mengen (Vgl. C. R. des l'Ac. des Sc. Paris, 1932, T. 197, p. 19).

H. Steinhaus: Bemerkungen über biorthogonale Reihen (Vgl. Studia Math. IV, S. 142—146).

21. XII. 33. S. Kaczmarz: Über allgemeine Transformationen (Studia Math. IV, S. 146—151).

S. Mazur und S. Orlicz: Über abstrakte Polynome (erscheint in Studia Math. V).

Comptes rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Poznań.

14. XI. 1929. W. Ślebodziński: Sur un système d'équations différentielles.

6. II. 1930. W. Ślebodziński: Sur les recherches récentes relatives à la théorie des groupes de Lie.

6. III. 1930. M. Biernacki: Sur les conditions suffisantes pour qu'une fonction de variable complexe soit analytique.

27. III. 1930. M. Denizot: Sur le pendule de Foucault.

15. V. 1930. M. Biernacki: Sur les coefficients du développement des fonctions uniformes en séries de Taylor.

22. V. 1930. M. Denizot: Sur la chute des corps.

20. XI. 1930. M. Biernacki: Sur la représentation conforme envisagée au voisinage de la frontière du domaine transformé.

5. II. 1931. K. Abramowicz: Sur les fonctions automorphes.

26. II. 1931. Z. Krygowski: L'oeuvre scientifique de Paul Appell.

8. V. 1931. W. Ślebodziński: Sur les invariants intégraux.

21. V. 1931. Z. Zawirski: Sur une généralisation du calcul des propositions.

3. XII. 1931. M. Biernacki: Sur les fonctions bornées d'une variable complexe.

25. II. 1932. K. Cwojdziński: Sur les systèmes pentasphériques n'impliquant pas l'emploi des sphères imaginaires.

28. IV. 1932 M Kryzan: Sur certaines propriétés de l'état physique de la terre.

28. V 1932. S. Zaremba: Sur un théorème fondamental relatif à la théorie mathématique de la conductibilité calorifique.

4. VI. 1932. L. Seipeltówna: Sur la résolution de certaines équations algébriques du 5-ème degré par la méthode de Klein.

25. XI. 1932. M. Biernacki: Sur une équation différentielle.

14. I. 1933. T. Banachiewicz: La méthode de Laplace et et la détermination des orbites.

9. II. 1933. W. Smosarski: Sur la polarisation de la lumière du ciel.

23. II. 1933. J. Witkowski: Le Congrès astronomique international à Cambridge en 1932.

16. VI. 1933. M. Dobrzycki: Sur les fonctions quasi-périodiques.

7. XII. 1933. M. Biernacki: Sur les fonctions analytiques dont l'argument est borné.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Wilno.

---

27. II. 1932. M. Krzyżański: Sur la différentiation sous le signe d'intégration (v. C. R. de Varsovie 26 (1933)).

13. I. 1933. M. Krzyżański: Sur les fonctions de deux variables à variation bornée généralisées.

23. I. 1933. S. Kempisty: Les opérations monotones sur les ensembles (v. Mathematica, 10).

30. I. 1933. J. Rudnicki: Sur un théorème de M. J. L. Walsch (v. ces Annales, t. XI (1932)).

30. V. 1933. J. Rudnicki: Sur les travaux du prof. Wiktor Staniewicz.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Varsovie, année 1932

[Abréviations: F. M. = Fundamenta Mathematicae; C. R. de Varsovie = Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres à Varsovie, cl. III]

---

15. I. K. Borsuk: „Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen“ [F. M. 19 (1932), p. 220].

22. I. S. Mazurkiewicz: „Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ [C. R. de Varsovie 25 (1932) p. 1].

S. Jaśkowski: „Sur la catégoricité de certains systèmes de la théorie des classes“.

12. II. T. Banachiewicz (Kraków): „Sur les déterminations des orbites“.

19. II. K. Kuratowski (Lwów): „Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension“ [F. M. 18 (1932), p. 285].

26. II. J. Spława-Neyman: „Sur les domaines semblables“ [Cf. J. Neyman and E. S. Pearson, Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London, (A), 231 (1933)].

S. Braun: „Sur certaines décompositions d'un ensemble de la puissance du continu“ [Cf. S. Braun et W. Sierpiński: „Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu“ F. M. 19 (1932), p. 1].

4. III. F. Leja: Sur les séries des polynômes homogènes“ [Rendic. di Palermo 56 (1932), p. 1].

S. Banach (Lwów): „Sur l'hypothèse quasi-ergodique“.

W. Sierpiński: „Sur une proposition équivalente à l'hypothèse du continu“ [Cf. S. Braun et W. Sierpiński, l. c.].

11. III. S. Mazurkiewcz: „Sur un problème concernant les fonctions de deux variables“.

S. Ulam (Lwów): „Sur les transformations topologiquement équivalentes“.

18. III. K. Borsuk: „Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre“ [F. M. 20 (1933), p. 177].

E. Szpilrajn: „Remarques sur les fonctions sousharmoniques“ [Annals of Mathematics (2) 34 (1933), p. 588],

1. IV. A. Zygmund (Wilno): „Sur la probabilité pour la convergence des séries“.

8. IV. W. Sierpiński: „Sur les translations des ensembles linéaires“ [F. M. 19 (1932), p. 22].

B. Knaster: „Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua“ [Verhandl. d. Intern. Mathematikerkongress Zürich 1932, 2, p. 193].

29. IV. S. Mazurkiewicz: „Sur les transformations intérieures“ [F. M. 19 (1932), p. 198].

W. Sierpiński: „Sur une propriété des fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune des variables“ [Public. mathém. de l'Univ. de Belgrade, 1 (1932)].

23. V. Th. Skolem (Bergen): „Über gewisse arithmetische Satzfunktionen“.

27. V. S. Mazurkiewicz: „Sur les ensembles d'unicité“ [Bull. Acad. Polon. 1933, p. 18].

W. Sierpiński: „Sur les projections des ensembles boreliens“ [Cf. S. Braun: „Quelques théorèmes sur les cribles boreliens“, F. M. 20 (1933), p. 166].

W. Sierpiński: „Sur les fonctions de Baire et leurs inversions“.

W. Sierpiński: „Sur une propriété caractéristique des fonctions de Baire à valeurs distinctes“ [Publ. mathém. de l'Univ. de Belgrade 1 (1932)].

17. VI. P. Mentré (Nancy): „Sur la théorie des caractéristiques de variétés géométriques“.

W. Sierpiński: Sur les translations des ensembles linéaires“ [Cf. L. Trzeciakiewicz: „Remarque sur les translations des ensembles linéaires“, C. R. de Varsovie 25 (1932), p. 63].

24. VI. A. Wundheiler: „Une démonstration simple de la formule d'interpolation de S. Bernstein“ [L'Enseignement mathém. 31 (1932), p. 75].

S. Mazurkiewicz: „Sur les composantes dimensionnelles d'un espace compact“ [F. M. 19 (1932), p. 243].

C. Kuratowski (Lwów): „Sur la notion de catégorie“ [Cf.

C. Kuratowski et S. Ulam: „Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire". F. M. 19 (1932), p. 247].

23. IX. S. Bergmann (Berlin): „Sur les fonctions analytiques de deux variables".

S. Mazurkiewicz: „Sur le type c de l'hyperespace d'un continu" [F. M. 20 (1933), p. 52].

7. X. S. Dickstein, B. Knaster et W. Sierpiński: „Le congrès international des mathématiciens à Zürich".

14. X. S. Mazurkiewicz et H. Szmuszkowiczówna: „Sur les suites de polynômes" [C. R. mens. de l'Acad. Pol. 1932, N° 9].

21. X. W. Sierpiński: „Sur les systèmes d'unicité" [F. M. 21 (1933)].

E. Szpilrajn: „Sur un problème de la mesure".

4. XI. K. Zarankiewicz: „Über ein Verfahren der konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete" [Zeitschr. für angewandte Math. u. Mechanik. 1933]

11. XI. E. Čech (Brno): „Les déformations projectives".

W. Sierpiński: „Sur l'ensemble des valeurs d'une fonction mesurable à valeurs distinctes", F. M. 20 (1933), p. 126].

C. Kuratowski (Lwów): „Sur les transformations des sphères en des surfaces sphériques" [F. M. 20 (1933), p. 206].

18. XI. F. Leja: „Sur les suites de polynômes bornées presque partout sur la frontière d'un domaine" [Mathem. Annalen 108 (1933), p. 517].

9. XII. A. Tarski: „Sur les propriétés élémentaires des relations".

16. XII. W. Sierpiński: „Sur la superposition des fonctions de Baire" [F. M. 20 (1933), p. 173].

État

de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1933.

Président: M. S. Mazurkiewicz.

Vice-Présidents: MM. S. Banach et S. Zaremba.

Secrétaire: M. T. Ważewski.

Vice-Secrétaires: MM. R. Dniestrzański et S. Turski.

Trésorier: M. S. Gołąb.

Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.

Commission de Contrôle: Mme Wilkosz et MM. Chwistek et Vetulani.

Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. S. Banach, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. J. Rudnicki.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresse.

Abrévations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno. Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Abramowicz Kazimierz Doc. Dr. (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Aronszajn Natan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Nowolipki 43, m. 7.
Auerbach Herman Dr. (L), Lwów, ul. Konopnickiej 6.
Banach Stefan Prof. Dr. (L), Lwów, ul. św. Jacka 22.
Banachiewicz Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Baran Jan, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Barnett I. A. Prof. Dr., Cincinnati (Ohio, U. S. A.), University.
Bartel Kazimierz Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Bary Nina Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Bessaga Mieczysław Inż., Lwów, Aleja Foch'a III, Dom Kolejowy.
Białobrzeski Czesław Prof. (Wa), Warszawa, Akademicka 3 m. 13.
Bielecki Adam Mr., Kraków, Kraszewskiego 11.
Biernacki Mieczysław Prof. Dr. (P), Poznań, Uniwersytet, Seminarjum Matematyczne, Collegium Majus, Zamek, Sala Nr. 6.
Birkenmajer Aleksander Doc. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Birnbaum Zygmunt Dr. (L), Lwów, ul. św. Anny 1.
Blumenfeld Izydor Inż. Dr. (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.

Borsuk Karol Dr. (Wa), Warszawa, Seminarjum Matematyczne, Oczki 3.
Bouligand Georges Prof Dr., Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Böttcher Łucjan Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Brablec Franciszek, Kraków, ul. Studencka 4.
Braunówna Stefanja Mr. (Wa), Warszawa, Marszałkowska 91.
Burstin Celestin Dr. (L), Institut mathématique de l'Université de Minsk (U. R. S. S.).
Cartan Elie Prof. Dr., Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.
Chromiński Antoni (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Chwistek Leon Prof. Dr. (L), Lwów, Uniwersytet.
Cwojdziński Kazimierz Dr. (P), Poznań, ul. Szamarzewskiego 13.
Czarnecka Jadwiga (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).
Czernik Tadeusz Mr. (Wl), Wilno, Wiwulskiego 13.
Čech Eduard Prof. Dr., Brno, ul. Nova 49.
Delsarte Jean, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, 35, rue Saint-Michel, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).
Dickstein Samuel Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Dniestrzański Roman Mr., Kraków, ul. Łobzowska 15.
Dollon Jean, Prof. de Mathématiques spéciales, Lycée Poincaré, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).
Durand Georges, Bourges (Cher, France), 3, rue Pasteur.
Dziewulski Wacław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 21.
Dziewulski Władysław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 23.
Dziwiński Placyd Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.
Fijoł Kazimierz, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.
Flamant Paul Prof. Dr., Strasbourg (Bas-Rhin, France), 35, rue Schweighauser.
Garcia Godofredo Prof. Ing. (Wa), Lima (Peru) Apartodo 1979.
Godeaux Lucien Prof. Dr., Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.
Gołąb Stanisław Doc. Dr., Kraków, Akademja Górnicza.
Grabowski Lucjan Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Greniewski Henryk Dr. (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Gruder Henryk Dr. (L), Lwów, ul. Kopernika 14.
Grużewska Halina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 8.

Grużewski Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 8.
Härlen Hasso Dr., Merseburg (Allemagne), Gutenbergstraße 8.
Hoborski Antoni Prof. Dr., Kraków, ul. Smoleńsk 26.
Hossiasson Janina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 6 m. 5.
Huber Maksymiljan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 75, dom A.
Hurewicz Witold Doc. Dr. (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Infeld Leopold Doc. Dr., Lwów, ul. Długosza 8.
Janet Maurice, Prof. Dr. Caen (Calvados, France), 7, rue de la Délivrande.
Janik Wincenty, Kraków, ul. Studencka, Gimnazjum.
Jantzen Kazimierz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Wielka 24.
Kaczmarz Stefan Doc. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Kalandyk Stanisław Dr. (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Kalicun-Chodowicki Bazyli Dr. (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Kampé de Fériet Joseph Prof. Dr., S. P., Lille (Nord, France), 16, rue des Jardins.
Kempisty Stefan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Kerner Michał Dr. (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Klawekówna Stefanja (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Kline J. R. Prof. Dr. (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Knaster Bronisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m. 3.
Kobrzyński Zygmunt Dr., (Wa), Pruszków p. Warszawą, ul. Graniczna 4.
Kołodziejczyk Stanisław Mr. (Wa), Warszawa, Szkoła Główna Gosp. Wiejskiego, Zakład Statystyki, Miodowa 23.
Koźniewski Andrzej Mr. (Wa), Warszawa, Hoża 61.
Krygowski Zdzisław Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Marszałka Foch'a 72, II p.
Kryzan Marjan Dr. (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Krzyżański Mirosław Mr. (Wl), Drohiczyn n/Bugiem, Warszawska 43.
Kuratowski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Skolimów pod Warszawą, ul. Prusa.
Kwietniewski Stefan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oczki 3, Seminarjum Matematyczne U. W.
Labrousse Léon, Prof., 7, rue Léon Vaudoyer, Paris (7°) (France).
Lainé Edouard Prof. Dr., Angers (Maine-et-Loire, France), 3 rue de Rabelais.

Leja Franciszek Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Leśniewski Stanisław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Leśnodorski Gustaw, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Levi-Civita Tullio Prof. Dr., Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Lichtenberg Władysław (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Lindenbaum Adolf Dr. (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Loria Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Łomnicki Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Łomnicki Zbigniew (L), Lwów, ul. Nabielaka 19.
Łukasiewicz Jan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Łuzin Nikołaj Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Maksymowicz Adam Dr. (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Mandelbrojt S., Prof. Dr., Clermond-Ferrand (Puy-de-Dôme, France), Université.
Marconi Andrzej (P), Poznań, ul. Kosińskiego 26.
Matulewicz Konstanty (Wl), Wilno, Witoldowa 53—39.
Mazur Stanisław Dr. (L), Lwów, Kętrzyńskiego 17.
Mazurkiewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Menger Karl Prof. Dr. (Wa), Wien IX (Autriche), Fruchthallergasse 2.
Mieńszow Dimitrij Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Moore R. L. Prof. Dr. (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Moroń Władysław, Katowice.
Napadiewiczówna Zofja (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.
Spława-Neyman Jerzy Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Kopernika 11, m. 6.
Nikliborc Władysław Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Nikodym Otton Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Nikodymowa Stanisława Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Ohrenstein Szymon, Drohobycz. I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Orlicz Władysław Dr. (L), Lwów, ul. Kopcowa 3.
Orłowski Józef (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Otto Edward Mr. (L), Lwów, Grodecka 131.
Pankalla Jan Inż. (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Pareński Aleksander Dr. (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Patkowski Józef Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Pearson Egon Sharpe Dr., London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.

Pearson Karl Prof. Dr., London W. C. 1, University College.
Pęczalski Tadeusz Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Plamitzer Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Poprużenko Jerzy Dr. (Wa), Warszawa, ul. Szopena 6, m. 10.
Posament Tadeusz Mr. (L), Lwów, Krasickich 11.
Prasad Gonesh Prof. Dr. (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manshions 2 Corporation str.
Przeborski Antoni Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Przygodzki Józef Inż. (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.
Rajchman Aleksander Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Rosenblatt Alfred Prof. Dr., Kraków, ul. Krowoderska 47.
Rozental Stefan Dr., Łódź, ul. Nawrot 4.
Rozmus Antoni, Piotrków, Gimnazjum Państwowe.
Rudnicki Juljusz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11, Seminarjum matematyczne U. S. B.
Ruziewicz Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.
Sabatowska Walerja (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Saks Stanisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Krasińskiego 18 m. 129 (Żolibórz).
Schauder Juljusz Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Leśna 7.
Scheybal Adolf, Gimnazjum Państwowe, Wadowice.
Schreier Józef (L), Drohobycz, Bednarska 8.
Sedlak Stefan, Kraków, ul. św. Wawrzyńca 30.
Seipeltówna Lidja Dr. (P), Poznań, ul. Rzepeckiego 27.
Sergesco Pierre Prof. Dr., Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Sieczka Franciszek Ks. Dr. (Wa), Płock, Seminarjum Duchowne.
Sierpiński Wacław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 73.
Smoliński Kazimierz (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Smoluchowska Helena (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Smosarski Władysław (P), Poznań, Uniwersytet.
Sokół-Sokołowski Konstanty Mr. (Wl), Wilno, Zamkowa 11, Seminarjum matematyczne U. S. B.
Stamm Edward Dr., Kraków, ul. Pawła Popiela.
Stankiewicz Ksawery Inż., Kraków, ul. Długa 50.
Starosolska - Szczepanowska Zofja (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Steckel Samuel Dr. (Wa), Białystok, Gimnazjum.
Steinhaus Hugo Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kadecka 14.

Sternbach Ludwik, Lwów, (L), Leona Sapiehy 5a.
Stożek Włodzimierz Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Nabielaka 55a.
Straszewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Poznańska 12.
Szczeniowski Szczepan Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Długosza 8.
Szczepanowski Karol Mjr. (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Szmuszkowiczówna Hanna Mr. (Wa), Warszawa, Kupiecka 8.
Szpilrajn Edward Dr., (Wa), Warszawa, Al. Ujazdowska 32, m. 9.
Szymański Piotr Dr. (Wa), Warszawa, Instytut Aerodynamiczny, Nowowiejska 50.
Ślebodziński Władysław Dr. (P), Poznań, ul. Głogowska 51.
Tarski Alfred Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Titz Henryk Dr., Kraków, ul. św. Tomasza 27.
Turowicz Andrzej Mr., Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Turski Stanisław Mr., Kraków, ul. Krasińskiego 9.
Ulam Stanisław Dr. (L), Lwów, ul. Kościuszki 16.
Urbański Włodzimierz Dr., Pionki, P. W. P. Laboratorjum centralne.
Vetulani Kazimierz Inż., Kraków, ul. Smoleńsk 14.
Walfisz Arnold Doc. Dr. (Wa), Radość p. Warszawą, Jasna 11.
Waraszkiewicz Zenon Mr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 69 m. 10.
Ważewski Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Weigel Kasper Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Weinlösówna Sala Dr. (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Weyssenhoff Jan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zygmuntowska 20.
Węgrzynowicz Leopold, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Węgrzynowicz Marjan (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Whyburn G. T. Dr., Austin (Texas, U. S. A.).
Wilk Antoni Dr., Kraków, ul. Wybickiego 4.
Wilkosz Witold Prof. Dr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Wilkoszowa Irena Mr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Wolibner Witold Dr. (Wa), Warszawa, Instytut Aerodynamiczny, Nowowiejska 50.
Wundheiler Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Chmielna 26 m. 5.
Zakrocki Stanisław, Kraków, ul. Smoleńsk 21.
Zalcwasser Zygmunt Dr. (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Zarankiewicz Kazimierz Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Nowowiejska 27.
Zaremba Stanisław Prof. Dr., Kraków, ul. Żytnia 6.
Zaremba Stanisław Krystyn Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11, Seminarjum Matematyczne U. S. B.

Zarycki Miron (L), Lwów, ul. Dwernickiego 32 a.
Zawirski Zygmunt Prof. Dr. (P), Poznań, Uniwersytet.
Zygmund Antoni Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Wielka 24, m. 17.
Zygmundowa Irena (Wl), Wilno, Wielka 24, m. 17.
Żorawski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Żyliński Eustachy Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.

Membres décédés.

Lichtenstein Leon Prof. Dr.
Sir Muir Thomas, F. R. S.

Membres dont les adresses manquent.

Babski Bohdan.
Bogucki Władysław.
Chmiel Juljan Dr.
Dehryng Bohdan Dr.
Długowski Gerhard.
Kaszycki Ludwik Inż.
Majewski Władysław (L)
Ostrzeniewski Ludwik.
Sobaczek Jan.
Włodarski Franciszek Dr.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de Mathématique échange ses Annales.

1. Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae (Sectio scientiarum mathematicarum), Szeged (Hongrie)
2. Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg, Hamburg (Allemagne).
3. Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes Rendus des Séances, Paris (France).
4. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Calcutta (Indes).

5. Annales scientifiques de l'Université de Jassy, Jassy (Roumanie).
6. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin (Allemagne).
7. Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien (Autriche).
8. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, Strasbourg (Bas-Rhin, France).
9. Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, Roma (Italie).
10. Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, Timişoara (Roumanie).
11. Contributions al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matematicas, La Plata (Argentine).
12. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, (Tchécoslovaquie).
13. Fundamenta Mathematicae, Warszawa.
14. Prace Matematyczno-Fizyczne, Warszawa.
15. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Zürich (Suisse).
16. Annals of Mathematics, Princeton (New-Jersey, U. S. A.).
17. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Toulouse (Haute-Garonne, France).
18. Transactions of the American Mathematical Society, New-York City (U. S. A.).
19. Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris (France).
20. Revue semestrielle des publications mathématiques, Amsterdam (Hollande).
21. Wiskundige opgaven met de Oplosingen, Amsterdam (Hollande).
22. Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam (Hollande).
23. Journal de la Société Physico-mathématique de Léningrade, Leningrad (U. R. S. S.).
24. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, Tokyo (Japon).
25. Thèses soutenues devant la Faculté des Sciences de l'Université de Bâle, Basel (Suisse).
26. Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine, Bucuresti (Roumanie).
27. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain (Belgique).

28. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München (Allemagne).
29. Scripta universitatis atque bibliothecae Hierosolymitanarum, Jerusalem (Palestine).
30. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh (Ecosse).
31. Archives Néerlandaises exactes et naturelles, Harlem (Hollande).
32. Communications de la Société Mathématique de Kharkow, Kharkow (U. R. S. S.).
33. Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid (Espagne).
34. Koniklijke Akademie van Wetenschappen (publications), Amsterdam (Hollande).
35. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Hamburg (Allemagne).
36. Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften, Stuttgart (Allemagne).
37. Proceedings of the London Mathematical Society, London (Angleterre).
38. Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales, Madrid (Espagne).
39. Proceedings of the Philosophical Society, Cambridge (Angleterre).
40. Norsk Matematisk Tidsskrift,
Norsk matematisk Forenings Skrifter, Oslo (Norvège).
41. Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie Royale des Sciences, Bruxelles (Belgique).
42. Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, Giessen (Allemagne).
43. Commentationes Physico-Mathematicae,
Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Helsingfors (Finlande).
44. Matematisk Tidsskrift, Copenhague (Dannemark).
45. Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan, Kazan (U. R. S. S.).
46. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Heidelberg (Allemagne).
47. The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai (Japon).
48. Sitzungsberichte der Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Tartu, Tartu (Esthonie).

49. Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, Leipzig (Allemagne).
50. The Mathematical Gazette, London (Angleterre).
51. Proceedings of the Benares Mathematical Society, Benares (Indes).
52. Annual report of the Smitsonian Institution, Washington (U. S. A.).
53. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Edinburgh (Ecosse).
54. Akademja Górnicza (publications), Kraków.
55. Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Bucuresti (Roumanie).
56. Mémoires de la Société Royale de Liège, Liège (Belgique).
57. Recueil de la Société Mathématique de Moscou, Moskwa (U. R. S. S.).
58. Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Mass., U. S. A.).
59. Bolletin del Seminario Matemático Argentino, Buenos Aires (Argentine).
60. Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, Bordeaux (Gironde, France).
61. Studia Mathematica, Lwów.
62. Časopis pro pěstováni Matematiky a Fysiky, Praha (Tchécoslovaquie).
63. Mathematica, Cluj (Roumanie).
64. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Milano.
65. Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, Padova (Italie).
66. Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, Bucuresti (Roumanie).
67. Prace geofizyczne, Warszawa.
68. Annali della R. Scuola Normale Superiora di Pisa, Pisa (Italie).
69. Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari, Cagliari (Italie).
70. Statistica, Warszawa.
71. Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, Beograd (Yougoslavie).
72. Bulletin de la Société Mathématique de Grèce, Athènes (Grèce).

73. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Liège (Belgique).
74. Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Sapporo (Japon).
75. Académie des Sciences d'Ukraine, Kyiv (Kieff, U. R. S. S.):
    Journal du cycle Mathématique.
    Bulletin de la Classe de Sciences Naturelles et Techniques.
    Mémoires de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.

Table des matières.